CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Cette épreuve comporte deux exercices et un problème indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^3}{12}-x+1$.

1. **a)** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$. En déduire le tableau de variation de f.

2. **a)** Montrer que f s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $[0,+\infty[$: une première fois sur l'intervalle $[0,2]$ et une deuxième fois sur l'intervalle $]2,+\infty[$.

On notera β et γ les deux solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $[0,+\infty[$ avec $\beta<\gamma$.

b) Simplifier l'expression $1+\dfrac{\beta^3}{12}$ (on l'exprimera à l'aide de β).

c) À l'aide de la calculatrice, montrer que β appartient à $\left]1\,;\,1{,}2\right[$ et que γ appartient à $\left]2{,}7\,;\,2{,}8\right[$.

d) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0,+\infty[$.

4. On cherche à obtenir une approximation de β. À cet effet, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=1+\dfrac{u_n^3}{12}. \end{cases}$$

a) Calculer u_1 puis démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[0,\beta]$.

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=f(u_n)$.

Que peut-on en déduire sur la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β.

d) Écrire dans le langage de votre choix (MAPLE, MATHEMATICA ou autre) un programme de quelques lignes permettant d'obtenir pour un entier N donné la valeur de u_N.

EXERCICE 2

On considère dans cet exercice l'équation différentielle (E) suivante :

$$x^2y'' - x(2x^2-1)y' - (2x^2+1)y = 0. \qquad (E)$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Calculer f' et f'' puis vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et sur l'intervalle $]-\infty,0[$.

2. On cherche désormais des solutions de (E) qui soient développables en série entière. Pour cela, on considère $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière, de rayon de convergence R supposé strictement positif.

Pour $x \in]-R,R[$, on écrit :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et on suppose que la fonction y est solution de (E) sur $]-R,R[$.

a) Exprimer, pour $x \in]-R,R[$, $y'(x)$ et $y''(x)$ à l'aide une série.

b) Démontrer que $a_0 = 0$ et que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$a_n = \frac{2}{n+1}a_{n-2}.$$

c) Calculer a_2. Plus généralement, que vaut a_n si n est un entier pair ?

d) Si n est impair, on écrit $n = 2p+1$ où p désigne un entier naturel.

Pour tout entier p supérieur ou égal à 1, exprimer a_{2p+1} en fonction de a_{2p-1}.

Montrer que pour tout entier naturel p :

$$a_{2p+1} = \frac{a_1}{(p+1)!}.$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$.

4. Donner, sans démonstration, les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \exp(x)$ et $x \mapsto \exp(x^2)$, ainsi que leurs rayons de convergence.

5. On note, pour tout x réel, $g(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$.

Que vaut $g(0)$?

Exprimer pour tout réel x non nul, $g(x)$ en fonction de $\exp(x^2)$ et de x.

6. Préciser la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle (E), puis exprimer les solutions de (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$ à l'aide des fonctions f et g.

7. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}$?

PROBLÈME

On rappelle que, pour tout x réel, la notation $\sin^2(x)$ désigne $\big(\sin(x)\big)^2$.

Partie A

1. Rappeler, sans démonstration, la nature (convergente ou divergente) de chacune des trois séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\sqrt{n}} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}.$$

2. Soit α un réel. Justifier que la série

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin^2(n\,\alpha)}{n^2}$$

est une série convergente.

Partie B

Dans cette partie, α désigne un réel fixé appartenant à l'intervalle $]0,\pi[$.
On note f la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{pour } t \in [-\alpha, \alpha], \\ f(t) = 0 & \text{pour } t \in]\alpha, \pi] \text{ et pour } t \in]-\pi, -\alpha[. \end{cases}$$

1. On suppose, **dans cette question 1 seulement**, que $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.
Représenter alors la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Donner la valeur des coefficients de Fourier $b_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (on justifiera brièvement la réponse).

Calculer les coefficients de Fourier $a_0(f)$ et $a_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Énoncer le théorème de Parseval (avec ses hypothèses) et justifier que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n\,\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}.$$

4. Déterminer la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2}.$$

Partie C

Dans cette partie, α désigne encore un réel appartenant à l'intervalle $]0,\pi[$.
On note h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad h(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}.$$

1. Déterminer la limite de h en 0^+. En déduire la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Donner sans démonstration la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

En déduire la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ puis la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

3. Calculer la dérivée de h sur $]0,+\infty[$.

4. Montrer, pour tout $x \in]0,+\infty[$, les deux inégalités suivantes :

$$\left|x\sqrt{x}\, h'(x)\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

et

$$\left|x\sqrt{x}\, h'(x)\right| \leqslant 4\sqrt{x}.$$

Pour montrer la deuxième inégalité, on rappelle que pour tout réel $x > 0$, $\left|\sin(x)\right| \leqslant x$.

5. En séparant les cas $x \geqslant 1$ et $0 < x < 1$, en déduire que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \left|h'(x)\right| \leqslant \frac{4}{x\sqrt{x}}.$$

6. Justifier que, pour tout entier N strictement positif

$$\int_\alpha^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} \int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}\,\mathrm{d}t,$$

puis que :

$$\int_\alpha^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \sum_{n=1}^{N} \int_0^\alpha \left(\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right)\mathrm{d}t.$$

7. À l'aide de la question **5.** de la partie **C** et de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction h, démontrer que pour tout n entier strictement positif et tout réel t dans l'intervalle $\left[0,\alpha\right]$, on a :

$$\left|\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right| \leqslant \frac{4t}{(n\alpha)^{3/2}}.$$

8. Montrer ensuite que pour tout entier N strictement positif, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \int_0^{\alpha} \left| \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right| \mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

9. En déduire avec soin que :

$$\left| \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x - \frac{\pi - \alpha}{2} \right| \leqslant 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

puis déterminer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 13 1174 – D'après documents fournis