Corrigé

Concours Communs Polytechniques

PREMIERE EPREUVE DE PHYSIQUE - FILIERE MP

Document rédigé par Paul Roux, Saint-Etienne (`paul.roux@prepas.org`)

A. Un exemple simple de servomécanisme à bifurcation mécanique

1. Liaisons

a) La puissance totale des actions intérieures de contact est nulle, puisque les liaisons intérieures sont supposées parfaites.
Cette puissance est indépendante du référentiel d'étude puisqu'il s'agit d'un torseur nul (actions intérieures, résultante et moment nuls) ; en effet, le passage du référentiel R au référentiel R' se fait selon $P = \int d\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ et $P' = \int d\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}'$ soit $P - P' = \int d\mathbf{F}\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{v}') = \int d\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}_e$ où l'expression de la vitesse d'entraînement en M du mouvement de R' relativement à R est $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{O'M}$ d'où enfin $P - P' = \int d\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}_{O'} + \int \mathbf{O'M}\wedge d\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\omega}$. Ici, $\int d\mathbf{F} = \mathbf{0}$ et $\int \mathbf{O'M}\wedge d\mathbf{F} = \mathbf{0}$ donc $\boxed{P = P' = 0 \text{ pour tous } R, R'}$.

b) Les liaisons extérieures sont également parfaites ; en particulier, la puissance des actions exercées par B sur S_d est nulle. Ceci impose encore $\boxed{\Gamma_{Oz} = 0}$.

2. Solide tournant

a) Le centre d'inertie de S est confondu avec A_1 et on a donc, pour un mouvement circulaire de rayon $l \sin\theta$, $\boxed{\mathbf{P} = ml\sin\theta\dot{\varphi}\mathbf{y}'}$. De plus, $\mathbf{L}_O = \mathbf{OA}_1 \wedge \mathbf{P}$ s'écrit ici $\boxed{\mathbf{L}_O = ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\mathbf{z}}$.

b) Le théorème de la résultante cinétique impose $\boxed{-\mathbf{R} = m\mathbf{g} - \dfrac{d\mathbf{P}}{dt}}$; celui du moment cinétique impose $\boxed{-\boldsymbol{\Gamma}_O = \mathbf{OA}_1\wedge m\mathbf{g} - \dfrac{d\mathbf{L}_O}{dt}}$.

c) On constate immédiatement la présence de termes liés aux dérivées première et seconde de φ puisque $\dfrac{d\mathbf{P}}{dt} = ml\sin\theta\left(\ddot{\varphi}\mathbf{y}' - \dot{\varphi}^2\mathbf{x}'\right)$ et $\dfrac{d\mathbf{L}_O}{dt} = ml^2\sin^2\theta\ddot{\varphi}\mathbf{z}$. En imposant l'équilibrage de la machine (solide symétrique), le centre d'inertie devient fixe sur l'axe Oz et $\boxed{\dfrac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{0}}$. On constate bien sûr aussi la disparition du moment en O du poids.
Dans ce cas, on obtient $\boxed{-\mathbf{R} = 2m\mathbf{g} = 2mg\mathbf{z}}$ et $\boxed{-\Gamma_O = -2ml^2\sin^2\theta\ddot{\varphi}\mathbf{z}}$.
Les liaisons étant parfaites, $\boxed{\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = cte}$.

d) L'énergie cinétique de ce solide s'écrit $E_k = \dfrac{1}{2}\dot{\varphi}\mathbf{z}\cdot\mathbf{L}_O$ soit $\boxed{E_k = ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi}}$; le poids ne travaille pas (centre d'inertie fixe) et les actions de contact non plus (liaisons parfaites) donc E_k est constant : $\boxed{\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = cte}$.

3. Système déformable astreint à tourner uniformément

a) La puissance *reçue* par la partie rigide du moteur, solide tournant à la vitesse angulaire $\Omega\,\mathbf{z}$, recevant le moment $-\,\mathbf{M}_m$, est égale à $-\,\mathbf{M}_m\cdot\Omega\,\mathbf{z}$; la puissance fournie par le moteur vaut donc $\boxed{P = M_m\Omega}$.
Dans le référentiel lié au losange, la puissance P' s'obtient par la même transformation que celle envisagée en **1.a)** ci-dessus et devient donc $P' = P - \Omega\mathbf{z}\cdot M_m\mathbf{z}$ soit $\boxed{P' = 0}$.

b) Dans le référentiel tournant, les deux points matériels ont une énergie cinétique égale correspondant à un mouvement circulaire de rayon l et d'angle θ, donc $\boxed{E'_k = ml^2\dot{\theta}^2}$.

c) L'énergie potentielle de pesanteur vaut $-\,2\,m\,g\,(z - z_0)$ où l'altitude z du centre d'inertie vaut $z = l\cos\theta$; on a donc $\boxed{E_{p,g} = -\,2\,m\,g\,l\cos\theta}$.

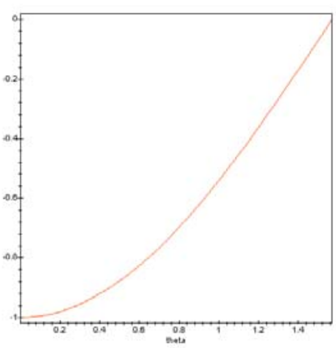
d) Les forces exercées dans R' comprennent de plus les forces d'inertie de Coriolis (dont la puissance est toujours nulle) et les forces d'inertie d'entraînement exercées sur chacune des deux masses. Leur puissance s'écrit $P = \mathbf{f}_e\cdot\mathbf{v}'$ pour chacune des deux masses, soit en tout $P_e = 2m\Omega^2 l\sin\theta\,\mathbf{x}'\cdot l(\cos\theta\,\mathbf{x}' - \sin\theta\,\mathbf{z})$

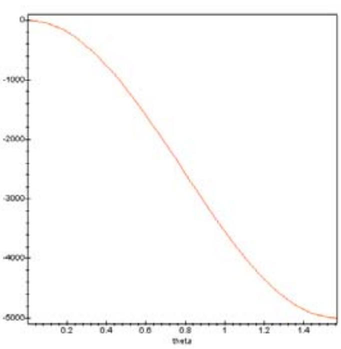
soit $\quad P_e = 2m\Omega^2 l^2\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{d}{dt}\left(-\,m\Omega^2 l^2\sin^2\theta\right)$ qui correspond à l'expression de l'énoncé avec $\boxed{\alpha = 1}$. On peut décrire cette énergie potentielle comme $\boxed{\textit{centrifuge}}$ puisqu'elle est minimale lorsque θ est maximale, les masses du régulateur s'éloignant au maximum de l'axe.

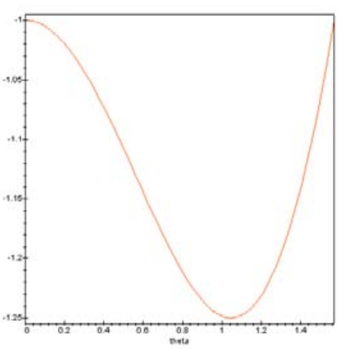
e) Regroupant les termes ci-dessus, il vient $\boxed{E'_p = 2mgl\left(-\cos\theta - \dfrac{l\Omega^2}{2g}\sin^2\theta\right)}$ ce qui correspond à $\boxed{E_0 = 2\,mgl}$ et $\boxed{u = \dfrac{\Omega}{\omega_0} = \Omega\sqrt{\dfrac{l}{g}}}$. $\boxed{\omega_0 = 5{,}72\,\mathrm{rad.s^{-1}}}$ et $\boxed{E_0 = 2{,}94\,\mathrm{J}}$.

4. Positions d'équilibre du système astreint à tourner uniformément

a) Les positions d'équilibre correspondent aux extréma de l'énergie potentielle ; on calculera donc $\dfrac{dE'_p}{d\theta} = E_0\left(1 - u^2\cos\theta\right)\sin\theta$, qui s'annule pour $\theta = 0$ et pour $\cos\theta = \dfrac{1}{u^2}$, dans le cas bien sûr où cette solution a un sens, donc si $u > 1$.
Les représentations ci-après sont proposées pour $u = 0{,}01$; $u = 100$ et $u = \sqrt{2}$.

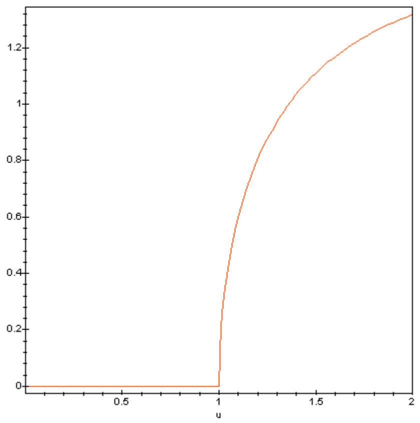






b) On cherche à vérifier les résultats ci-dessus : pour u faible, la position d'équilibre stable est θ = 0 ; pour u élevé, c'est cette qui vérifie cos θ = $1/u^2$, très voisine de π/2 ; pour u intermédiaire, la discussion reste à faire.
Une position d'équilibre est stable si l'énergie potentielle y est minimale ; calculons donc $\dfrac{d^2E'_p}{d\theta^2} = E_0\left[\cos\theta + u^2\left(1-2\cos^2\theta\right)\right]$. La position $\boxed{\theta = 0}$ est donc stable à condition que $E_0\left[1-u^2\right] > 0$ ou $\boxed{u<1}$, c'est-à-dire aussi longtemps que l'autre position n'existe pas. L'autre position $\boxed{\cos\theta = 1/u^2}$ est donc stable aussi longtemps que $E_0\left[\dfrac{1}{u^2} + u^2\left(1-\dfrac{2}{u^4}\right)\right] > 0$ ou $u^2 - \dfrac{1}{u^2} > 0$ soit enfin $\boxed{u>1}$, c'est-à-dire dès que cette position existe.
Le cas u = 1 doit être traité à part ; dans ce cas, $E'_p = E_0\left(-\cos\theta - \dfrac{1}{2}\sin^2\theta\right)$ admet un seul extrémum en θ = 0. L'étude des dérivées successives montre que seule la dérivée quatrième est non nulle en θ = 0 avec une valeur positive (à savoir $\left.\dfrac{d^4E'_p}{d\theta^4}\right|_{\theta=0} = 3E_0 > 0$) et cette position est un équilibre $\boxed{\text{stable}}$.

c) Les positions d'équilibre stable sont, compte tenu de ce qui précèdent, données par θ = 0 si $u \le 1$ et θ = arc cos $1/u^2$ sinon ; le tracé correspondant est :



Pour obtenir $\theta_e = \pi/4$, il faut $\dfrac{1}{u^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\boxed{\Omega = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{\sqrt{2}}} = 4{,}81\,\text{rad.s}^{-1}}$ ou encore $\boxed{\Omega = 45{,}9 \text{ tours par minute}}$.

5. Influence d'un ressort vertical

a) L'énergie potentielle élastique s'écrit ici $E_{p,k} = \dfrac{1}{2}K\left(h - 2l\cos\theta - l_0\right)^2$ ou, dans les conditions de l'énoncé, $E_{p,k} = 2Kl^2\left(1-\cos\theta\right)^2$. On écrira donc plutôt cette expression $\boxed{E_{p,k} = E_0\eta^2\left(1-\cos\theta\right)^2}$ et l'énergie potentielle totale se met sous la forme $\boxed{E'_p = E_0\left(-\cos\theta - \dfrac{u^2}{2}\sin^2\theta + \eta^2\left(1-\cos\theta\right)^2\right)}$.

b) Il suffit de reprendre le principe de l'étude ci-dessus, avec cette fois-ci $\boxed{\dfrac{dE'_p}{d\theta} = E_0\left(1+2\eta^2 - \left(u^2+2\eta^2\right)\cos\theta\right)\sin\theta}$; les conclusions sont donc exactement les mêmes que précédemment à condition de remplacer u^2 par $\dfrac{u^2+2\eta^2}{1+2\eta^2}$; on aura donc le cas où $\dfrac{u^2+2\eta^2}{1+2\eta^2} \leq 1$ ou $\boxed{u \leq 1}$ pour lequel $\theta = 0$ est la seule position d'équilibre stable, et $\boxed{u > 1}$ pour lequel $\theta = 0$ est une position d'équilibre instable, la seule position d'équilibre stable correspondant à $\boxed{\cos\theta = \dfrac{1+2\eta^2}{u^2+2\eta^2}}$.

c) L'allongement demandé vaut $h - 2\,l\cos\theta - l_0$ soit, en fonction des données de l'énoncé, $\Delta l_r = 2l\left(1 - \dfrac{1+2\eta^2}{u^2+2\eta^2}\right)$ ou $\boxed{\Delta l_r = 2l\dfrac{u^2-1}{u^2+2\eta^2}}$.

d) On a ici $\eta^2 = 2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1+2\eta^2}{u^2+2\eta^2} = \dfrac{5}{u^2+5}$ soit $u = \sqrt{5\left(\sqrt{2}-1\right)}$ donc enfin $\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{5}\sqrt{\sqrt{2}-1} = 5{,}30 \text{rad.s}^{-1}}$ ou $\boxed{\Omega = 50{,}6 \text{ tours par minute}}$.

B. Influence du rayonnement et de la gravitation dans l'étude des gaz

1. Energie interne et entropie d'un gaz parfait monoatomique

a) L'énergie interne d'un gaz parfait se réduit, en l'absence d'interaction entre atomes, à la seule énergie cinétique Ne_c des N atomes du gaz. La température du gaz parfait étant définie par le théorème d'équipartition, associant ½ $k_B\,T$ à chacun des trois degrés de liberté de translation d'un atome, on obtient donc $\boxed{U = N\dfrac{3}{2}k_BT = \dfrac{3}{2}nRT}$ puisque $n = \dfrac{N}{N_A}$ et $R = N_Ak_B$.

On en déduit immédiatement $\boxed{C_{vm} = \left(\dfrac{1}{n}\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \dfrac{3}{2}R}$. Posant $H = U + P\,V$ donc $H = U + n\,R\,T$, $\boxed{C_{pm} = \left(\dfrac{1}{n}\dfrac{\partial H}{\partial T}\right)_P = \dfrac{5}{2}R}$. Il vient $\boxed{\gamma = \dfrac{5}{3}}$.

b) L'identité thermodynamique $dS = \dfrac{dU}{T} + \dfrac{PdV}{T}$ s'écrit, pour un gaz parfait monoatomique, $dS = \dfrac{3}{2}nR\dfrac{dT}{T} + nR\dfrac{dV}{V}$ qui s'intègre immédiatement selon $\boxed{S = nR\ln\dfrac{T^{\frac{3}{2}}V}{T_0^{\frac{3}{2}}V_0} = S_0 + nR\ln\left(T^{\frac{3}{2}}V\right)}$. La constante S_0 correspond au choix de l'état (T_0, V_0) pour lequel on choisit l'origine des entropies. Le principe de Nernst (qui fixe une entropie nulle pour $T \to 0$) ne peut s'appliquer à cette formule car aucun corps ne se comporte plus comme un gaz parfait si $T \to 0$.

c) La relation S = constante impose $\boxed{T^{\frac{3}{2}}V = cte}$. Si le volume est multiplié par dix, $\boxed{T_f = T_i\left(\dfrac{V_i}{V_f}\right)^{\frac{2}{3}} = T_i 10^{-\frac{2}{3}} = 43\text{K}}$.

d) A température constante, $\boxed{\Delta U = 0}$ et $\boxed{\Delta S = nR\ln\dfrac{V_f}{V_i} = nR\ln 10 = 19{,}1\text{J.K}^{-1}}$.

L'évolution est réversible isotherme donc $\boxed{Q = T\Delta S = 5{,}74\text{kJ}}$ avec donc nécessairement $\boxed{W = - Q = - 5{,}74\text{kJ}}$.

On n'aurait contradiction avec l'énoncé de Kelvin du second principe que si le gaz fournissait du travail lors d'une transformation monotherme $\boxed{\textit{cyclique}}$, alors qu'ici les états initial et final sont différents.

e) On a déjà écrit $\boxed{dS = \dfrac{dU}{T} + \dfrac{PdV}{T}}$. Comme le piston est rigide, $dV_1 = dV_2 = 0$; comme le système est isolé, $dU_1 = - dU_2$. On a enfin $dS = \dfrac{dU_1}{T_1} + \dfrac{dU_2}{T_2}$ soit l'expression proposée avec $\boxed{C = 1}$.

Comme $dS > 0$ pour une évolution spontanée d'un système isolé, dU_1 sera positif si $1/T_1 > 1/T_2$ ou $T_1 < T_2$: les échanges thermiques se font dans un sens imposé par le second principe, $\boxed{\text{du corps le plus chaud vers le plus froid}}$. L'équilibre thermique (S maximum) impose $\boxed{T_1 = T_2}$.

On a vu ci-dessus que $\left(\dfrac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \dfrac{1}{T}$ donc $\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right)_V = -\dfrac{1}{T^2}\left(\dfrac{\partial T}{\partial U}\right)_V = -\dfrac{1}{C_{vm}T^2}$ et on en déduit que $\left(\dfrac{\partial^2 S_1}{\partial U_1^2}\right)_V = -\dfrac{1}{C_{vm}T_1^2}$ et $\left(\dfrac{\partial^2 S_2}{\partial U_1^2}\right)_V = +\left(\dfrac{\partial^2 S_2}{\partial U_2^2}\right)_V = -\dfrac{1}{C_{vm}T_2^2}$; on aura donc $\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial U_1^2}\right)_V = -\dfrac{1}{C_{vm}}\left(\dfrac{1}{T_1^2} + \dfrac{1}{T_2^2}\right)$ et la condition de stabilité s'écrit donc $\boxed{C_{vm} > 0}$.

2. Thermodynamique du rayonnement

a) La relation proposée ici impose $\left(\dfrac{\partial}{\partial V}[Vw(T)]\right)_T = w(T) = T\left(\dfrac{\partial}{\partial T}\dfrac{w}{3}\right)_V - \dfrac{w}{3}$ qui peut s'écrire sous forme d'une équation différentielle pour w : $\boxed{4\dfrac{w}{T} = \dfrac{dw}{dT}}$ donc $\boxed{w = aT^4}$ où a s'exprime en $\boxed{\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-4}}$.

b) Le coefficient statistique $\boxed{\beta = \dfrac{1}{k_BT}}$ décrit le facteur statistique de Boltzmann, c'est-à-dire que la probabilité d'observer une particule dans un état d'énergie ε si elle appartient à un système thermostaté à T est proportionnelle à $\boxed{\exp\left(-\dfrac{\varepsilon}{k_BT}\right) = \exp(-\beta\varepsilon)}$.

On obtient l'énergie volumique en sommant sur toutes les fréquences ν selon $w = \int_{\nu=0}^{\infty} w_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{\exp(\beta h\nu)-1}d\nu$; on fait alors le changement de variable $x = \beta\ h\ \nu$ pour obtenir $w = \frac{8\pi}{c^3 h^3 \beta^4}\int_0^\infty \frac{x^3}{\exp x - 1}dx$ qui s'écrit encore $\boxed{w = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3h^3}T^4}$ soit $\boxed{a = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3h^3} = 7{,}54.10^{-16}\ \mathrm{J.m^{-3}.K^{-4}}}$.

c) On a encore ici l'identité $dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = \frac{1}{T}\left[(w+P)dV + Vdw\right]$ qui s'écrit encore $dS = 4a\left[\frac{1}{3}T^3dV + VT^2\right]$ qui est évidemment la différentielle de $\boxed{S = \frac{4}{3}aT^3V}$ à une constante additive près, soit $\boxed{A = \frac{4}{3}a}$. Un rayonnement isentropique évolue donc selon $T^3V = cte$ donc $TV^{\gamma_r - 1} = cte$ où $\gamma_r - 1 = 1/3$ soit $\boxed{\gamma_r = \frac{4}{3}}$.

3. Thermodynamique d'un gaz parfait en présence de rayonnement

a) On écrit à nouveau l'identité $dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = \frac{dU_{gp} + dU_r}{T} + \frac{P_{gp}+P_r}{T}dV$ sous la forme $dS = \frac{1}{T}\left(\frac{nR}{\gamma-1}\right)dT + \frac{1}{T}\left(aT^4dV + 4aT^3VdT\right) + \frac{P_{gp}+P_r}{T}dV$ soit, après regroupement, $dS = \frac{1}{T}\left(\frac{nR}{\gamma-1} + 4aVT^3\right)dT + \frac{P_{gp}+4P_r}{T}dV$ qu'on peut bien sûr encore écrire $\boxed{TdS = \frac{V}{T}\left(\frac{P_{gp}}{\gamma-1} + 12P_r\right)dT + \left(P_{gp}+4P_r\right)dV}$. $\boxed{K = T}$ s'exprime en $\boxed{\text{kelvin}}$.

b) L'entropie du système s'obtient par intégration du résulta précédent ; on obtient encore $dS = \frac{nR}{\gamma-1}\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V} + 4VaT^2dT + \frac{4}{3}aT^3dV$ qui, à une constante près, s'intègre selon $\boxed{S = \frac{nR}{\gamma-1}\ln T + nR\ln V + \frac{4}{3}VaT^3}$; on obtient $\boxed{\textit{évidemment}}$ la somme des deux entropies précédemment déterminées, à savoir celle $\frac{nR}{\gamma-1}\ln T + nR\ln V$ du gaz parfait et celle $\frac{4}{3}VaT^3$ du rayonnement.

c) Une évolution isentropique du gaz est caractérisée par $dS = 0$ soit ici $0 = \frac{dT}{T}\left(\frac{P_{gp}}{\gamma-1} + 12P_r\right)dT + \left(P_{gp}+4P_r\right)\frac{dV}{V}$ ce qui permet d'écrire le coefficient Γ puisque $\boxed{\Gamma - 1 = (\gamma-1)\frac{P_{gp}+4P_r}{P_{gp}+12(\gamma-1)P_r}}$.

On notera encore $P_{gp} = \alpha\ (P_{gp} + P_r)$ donc $P_{gp} = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}P_r$ d'où on tire $\boxed{\Gamma = 1 + (\gamma - 1)\dfrac{\alpha + 4(1-\alpha)}{\alpha + 12(\gamma-1)(1-\alpha)}}$.

d) Si $\alpha = 1$, la pression du gaz parfait domine et on retrouve bien sûr $\boxed{\Gamma = \gamma}$. Si le gaz est monoatomique, $\boxed{\Gamma = \dfrac{5}{3}}$; s'il est diatomique, $\boxed{\Gamma = \dfrac{7}{5}}$. Enfin, pour $\alpha = 0$, la pression qui domine est celle du rayonnement et on retrouve $\boxed{\Gamma = \dfrac{4}{3} = \gamma_r}$ comme dans le cas de l'étude du rayonnement seul.

4. Thermodynamique d'un gaz parfait autogravitant

a) Pour un tel satellite de vitesse v orbitant à la distance r du centre de la Terre, el principe fondamental de la dynamique en projection radiale impose $m\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{GMm}{r^2}$ si m est la masse du satellite, M celle de la Terre et G la constante de la gravitation universelle. Comme d'autre part $E_{p,g} = -\dfrac{GMm}{r}$ on obtient $\boxed{\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{r} = -\dfrac{1}{2}E_{p,g}}$ qui est la relation demandée.
Ainsi, lorsque le satellite est freiné, $E = E_k + E_{p,g} = -E_k$ diminue donc v augmente ; le satellite voit son énergie cinétique et sa vitesse augmenter au fur et à mesure qu'il descend vers le sol, son énergie potentielle diminuant deux fois plus que son énergie cinétique n'augmente.

b) On a ici $U = U_{gp} + E_{p,g} = U_{gp} - 2E_k = \dfrac{nR}{\gamma - 1}T - 3nRT$ qu'on peut écrire encore $\boxed{U = \dfrac{nR}{\gamma-1}T(4-3\gamma)}$ ou on retrouve le résultat proposé avec $\boxed{B = \dfrac{R}{\gamma-1} = C_{vm}}$.

c) L'expression ci-dessus fournit immédiatement $\dfrac{dU}{dT} = nC_{vm}(4-3\gamma)$ donc $\boxed{C_{vm}^g = C_{vm}(4-3\gamma)}$. Dans le cas d'un gaz monoatomique, $\boxed{C_{vm}^g = -C_{vm} < 0}$ et le système autogravitant est instable ; un nuage de gaz atomique s'effondre sous l'effet de la gravitation jusqu'à ce que la pression due au rayonnement (d'origine thermonucléaire) rétablisse l'équilibre. Dans le cas d'un gaz diatomique, $\boxed{C_{vm}^g = -\dfrac{1}{5}C_{vm} < 0}$ et la stabilité n'est pas non plus assurée, même si le cas paraît moins intéressant su point de vue de l'astrophysique.