

Corrigé  
**Concours Communs Polytechniques**  
**SECONDE EPREUVE DE PHYSIQUE - FILIERE MP**

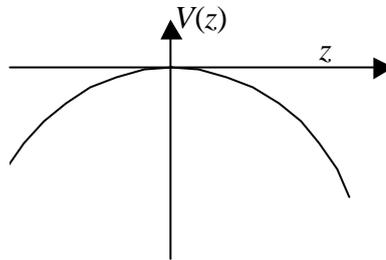
---

Document rédigé par Paul Roux, Saint-Etienne (paul.roux@prepas.org)

### A. Pièges électroniques en 1D, 2D, 3D

#### I. Piège 1D

1. De façon immédiate  $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$  conformément aux lois de l'électrostatique dans le vide.
2. Il s'agit d'une parabole avec la concavité vers le bas :



Dans le plan  $Oxy$ ,  $V(x, y) = -\frac{V_0}{4d^2}(x^2 + y^2) = -\frac{V_0}{4d^2}\rho^2$  et les équipotentielles sont des cercles de centre  $O$ .

Dans un plan quelconque passant par  $Oz$ ,  $V(x, y) = -\frac{V_0}{2d^2}(\rho^2 - z^2)$  et les équipotentielles sont des hyperboles équilatères dont  $Oz$  est une asymptote.

Finalement, les surfaces équipotentielles sont des hyperboloïdes de révolution, d'axe  $Oz$ . On reconnaît d'ailleurs certaines de ces surfaces dans les électrodes proposées à la question suivante.

3. La continuité du potentiel à la surface des électrodes permet de déterminer le potentiel des coupelles  $z^2 - \rho^2 = z_0^2$  sous la forme  $V_c = \frac{V_0}{2d^2}z_0^2$ ; de même l'électrode annulaire  $z^2 - \rho^2 = -r_0^2$  a pour potentiel  $V_a = -\frac{V_0}{2d^2}r_0^2$ . Enfin, les connexions imposent  $V_0 = V_c - V_a$  donc  $z_0^2 + r_0^2 = 2d^2$ .

4. a) En l'absence de toute autre force,  $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e(-\mathbf{grad}\Phi)$  s'écrit :

$$\boxed{m\ddot{x} = -\frac{eV_0}{2d^2}x \quad m\ddot{y} = -\frac{eV_0}{2d^2}y \quad m\ddot{z} = \frac{eV_0}{d^2}z}$$

Le mouvement axial est donc confiné si  $z(t)$  est bornée, donc si  $V_0 < 0$ .

- b) La pulsation correspondante est  $\omega_z = \sqrt{-\frac{eV_0}{md^2}} = 1,56 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$  avec pour fréquence correspondante  $f_z = \frac{\omega_z}{2\pi} = 24,9 \text{ MHz}$ .

## II. Pièges 2D

1. a) Le principe fondamental de la dynamique s'écrit  $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  soit en

core  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega_c \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}$  avec  $\omega_c = 8,79 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 140 \text{ MHz}$ .

- b) Les conditions initiales s'écrivant  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$  et  $v_{0x} = v_0 \sin \theta_0$ ,  $v_{0y} = 0$ ,  $v_{0z} = v_0 \cos \theta_0$ , on commence par résoudre en projection sur  $Oz$  l'équation  $\ddot{z} = 0$  qui fournit  $z = v_0 \cos \theta_0 t$ ; on écrit encore les équations du mouvement projetées dans le plan  $Oxy$  sous la forme  $\ddot{x} = -\omega_c \dot{y} \Rightarrow \dot{x} = -\omega_c y + v_0 \sin \theta_0$  et  $\ddot{y} = \omega_c \dot{x} \Rightarrow \dot{y} = \omega_c x + v_0$ . On en déduit  $\ddot{y} + \omega_c^2 y = \omega_c v_0 \sin \theta_0$  soit compte tenu

des conditions initiales  $y = \frac{v_0 \sin \theta_0}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t)$ ; on en déduit immédiatement

$x = \frac{v_0 \sin \theta_0}{\omega_c} \sin \omega_c t$  et le mouvement est circulaire de rayon  $\frac{v_0 \sin \theta_0}{\omega_c}$ .

- c) Il s'agit d'un piège 2D puisque la trajectoire de l'électron en projection dans le plan  $Oxy$  est un cercle de rayon maximal  $r_{\max} = \frac{v_0}{\omega_c} = 0,1 \text{ mm}$ .

2. a) Dans l'approximation des régimes quasi-permanents, on néglige le champ magnétique du aux variations temporelles du champ électrique qui est donné par  $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$  d'où les équations :

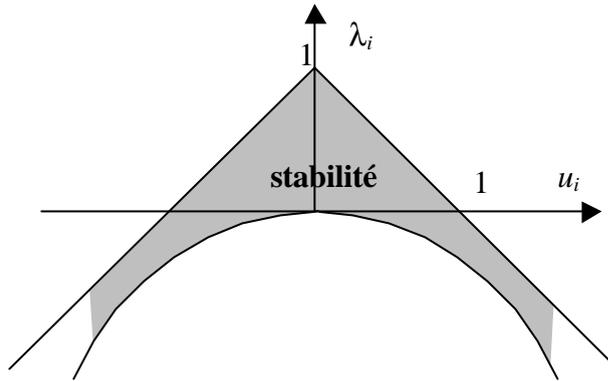
$$m\ddot{x} = \frac{ex}{r_0^2} (V_s + U_m \cos \Omega t) \quad m\ddot{y} = 0 \quad m\ddot{z} = -\frac{ez}{r_0^2} (V_s + U_m \cos \Omega t)$$

Le changement de variable demandé se fait selon  $\frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{\Omega^2}{4} \frac{d^2 q}{d\theta^2}$  soit, après substitution,

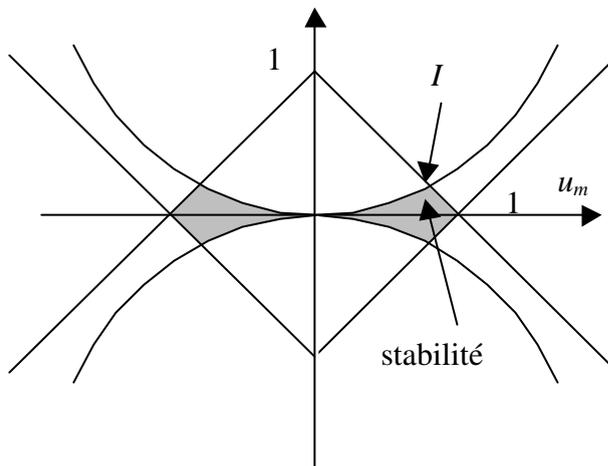
$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + \left[ -2 \frac{V_s}{\alpha} + \frac{U_m}{\alpha} \cos \theta \right] x = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 z}{d\theta^2} + \left[ 2 \frac{V_s}{\alpha} - \frac{U_m}{\alpha} \cos \theta \right] z = 0$$

soit en fin  $\lambda_x = -2 \frac{V_s}{\alpha} = -2u_s = -\lambda_z$  et  $u_x = \frac{U_m}{\alpha} = u_m = -u_z$ .  $\theta$  étant sans dimension,  $\lambda_i$  et  $u_i$  le sont aussi et  $\alpha$  est une tension, mesurée en volt.

- b) Le graphe demandé est immédiat, si on remarque que  $-u^2/2$  et  $1 - |u|$  ne se coupent jamais puisque l'équation  $u^2 - 2|u| + 2 = 0$  n'a pas de solution réelle. La zone de stabilité est comprise entre les courbes représentant  $-u^2/2$  (parabole vers le bas) et  $1 - |u|$  (affine par morceaux.)



Si maintenant on impose à la fois que  $2 v_s$  et son opposé vérifient la condition de stabilité (en  $x$  et  $z$ ), il vient  $-0,5u_m^2 \leq \pm 2v_s \leq 1 - |u_m|$  qui se représente comme sur la figure ci-après :



Les coordonnées de  $I$  vérifient  $1 - u_I = 0,5u_I^2$  soit  $u_I = \sqrt{3} - 1$  donc  $v_I = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Comme on choisit  $u_m = u_I$ , il vient  $\alpha = \frac{U_m}{u_m} = 6,83V$  puis  $\Omega = \sqrt{\frac{2e\alpha}{m_e r_0^2}}$  soit

$\Omega = 7,75 \cdot 10^8 \text{rad.s}^{-1}$  donc  $\frac{\Omega}{2\pi} = 123 \text{MHz}$ . Enfin, on impose  $v_s = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$  d'où

$$V_s = \alpha v_s = 0,45V.$$

### III. Piège 3D

- La somme des forces déjà considérées mène à  $\ddot{x} = \frac{1}{2} \omega_z^2 x - \omega_c \dot{y}$ ,  
 $\ddot{y} = \frac{1}{2} \omega_z^2 y + \omega_c \dot{x}$  et  $\ddot{z} = -\omega_z^2 z$ . On en déduit immédiatement  $\ddot{\zeta} = \frac{1}{2} \omega_z^2 \zeta + i \omega_c \dot{\zeta}$ .
- L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle a pour discriminant  $\delta = 2\omega_z^2 - \omega_c^2 < 0$  et les deux racines de cette équation caractéristique sont

imaginaires pures, à savoir  $r = i \omega_1$  et  $r = i \omega_2$  avec  $\omega_1 = \omega_c + \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}$  et  $\omega_2 = \omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}$ ; on en déduit  $\zeta = \zeta_1 \exp(i\omega_1 t) + \zeta_2 \exp(i\omega_2 t)$  et les solutions  $x$  et  $y$  sont des combinaisons linéaires de solutions harmoniques de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  avec  $\omega_1 = 1,73 \cdot 10^9 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $f_1 = 275 \text{ MHz}$ ;  $\omega_2 = 2,8 \cdot 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $f_2 = 4,5 \text{ MHz}$ .

## B. Faisceau gaussien

1. a) On a immédiatement  $I(z, \rho) = C^2(z) \exp\left(-2 \frac{\rho^2}{w^2(z)}\right)$ . Le tracé de cette fonction gaussienne est classique.

On définit ici la largeur à mi-hauteur comme le *rayon* de la zone telle que  $I(z, \rho)$  reste supérieur à la moitié de sa valeur maximale  $C^2(z)$ , soit  $\Delta \rho_{1/2} = w(z) \sqrt{\frac{\ln 2}{2}}$ .

- b) Le flux total est donné par  $\Phi_l = \int_0^\infty C^2(z) \exp\left(-2 \frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) 2\pi \rho d\rho$  qui se calcule aisément par le changement de variable  $u = \rho^2$  soit  $\Phi_l = \frac{\pi}{2} C^2(z) w^2(z)$ . On pourra noter que la conservation de l'énergie impose que  $\Phi_l$  reste indépendant de  $z$ .

- c) La fraction demandée vaut  $\phi = \frac{\int_0^w \exp\left(-2 \frac{u}{w^2}\right) du}{\int_0^\infty \exp\left(-2 \frac{u}{w^2}\right) du}$  soit  $\phi = 1 - \exp(-2) = 0,87$ .

On pourra adopter pour  $w$  le nom de *rayon du faisceau* puisque 87% de l'énergie sont concentrées dans un cercle de rayon  $w$ .

L'éclairement demandé est soit l'*éclairement moyen*  $\frac{\Phi_l}{\pi w^2} = 2,75 \text{ kW.m}^{-2}$ , soit

l'*éclairement local* à la distance  $\rho$  de l'axe  $I = \frac{2\Phi_l}{\pi w^2} \exp\left(-2 \frac{\rho^2}{w^2}\right)$  ou, numériquement,  $I = 6,37 \text{ kW.m}^{-2} \exp\left(-2 \rho_{\text{mesuré en mm}}^2\right)$ .

2. a) On rappelle ici le principe de HUYGENS ET FRESNEL dans les conditions de la diffraction à l'infini (diffraction de FRAUNHOFER) : on peut considérer l'onde diffractée par une pupille plane comme une *somme cohérente* d'ondelettes émises par les différents éléments d'aire  $dx dy$  de la pupille diffractante. L'onde émise par l'élément d'aire  $dx dy$  est proportionnelle à cette aire et à l'amplitude de l'onde incidente. Enfin, ces ondelettes reconstruisent l'onde totale en  $P$  compte tenu de leur différence de phase, due à la propagation du point  $M(x, y)$  jusqu'en  $P$ . Cette phase, si on prend pour origine l'onde diffractée au voisinage de  $O$ , s'écrit :

$$\phi = -\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{OM} \cdot \mathbf{u} = -\frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y)$$

d'où les relations demandées,  $u = \frac{\alpha}{\lambda}$   $v = \frac{\beta}{\lambda}$ .

Le calcul demandé est immédiat, sous la forme :

$$\hat{t}(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x\right) dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\beta y\right) dy$$

Les deux intégrales se calculent de la même façon; on pose  $x = \sqrt{\pi}\xi w_0$  puis  $a = \frac{\sqrt{\pi}\alpha w_0}{\lambda}$  avec les notations de l'énoncé pour obtenir une répartition d'onde diffractée produit de deux gaussiennes :

$$\hat{t}(\alpha, \beta) = \pi w_0^2 \exp\left(-\frac{\pi w_0^2}{\lambda^2}\alpha^2\right) \exp\left(-\frac{\pi w_0^2}{\lambda^2}\beta^2\right) = \pi w_0^2 \exp\left(-\frac{\pi w_0^2}{\lambda^2}[\alpha^2 + \beta^2]\right)$$

b) L'intensité de l'onde lumineuse est alors  $I(\alpha, \beta) = |\hat{t}(\alpha, \beta)|^2$  soit, à une constante

multiplicative près,  $I(\alpha, \beta) = \pi^2 w_0^4 \exp\left(-2\frac{\pi w_0^2}{\lambda^2}(\alpha^2 + \beta^2)\right)$ . La demi-largeur à mi-hauteur est la valeur de  $\alpha$  (ou  $\beta$ ) pour laquelle cette intensité prend une valeur

moitié de celle atteinte en  $\alpha = 0$ , à savoir  $\frac{\Delta\theta_{1/2}}{2} = \frac{\lambda}{w_0} \sqrt{\frac{\ln 2}{2\pi}}$ . On remarquera

qu'un ordre de grandeur satisfaisant est obtenu en écrivant  $\Delta\theta_{1/2} \cong 2\frac{\lambda}{w_0}$ , conformément aux résultats usuels de la diffraction de Fraunhofer.

Numériquement, on trouve  $\Delta\theta_{1/2} = 4,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 0,14'$  (minute d'arc).

3. a) Une onde sphérique divergente peut s'écrire  $\underline{\Psi}_s = \frac{\Psi_0}{r} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}r\right)$ .

b) Le développement limité sera effectué pour  $z > 0$  (onde divergente), ce qui permet d'écrire  $r = \sqrt{z^2 + \rho^2} \cong z\left(1 + \frac{\rho^2}{2z^2}\right)$ . Les variations du terme d'enveloppe  $1/r$  étant beaucoup plus lentes que celles du terme de phase, nous écrirons donc

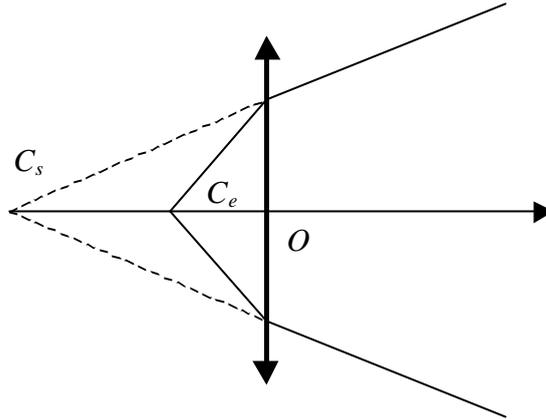
l'onde sphérique  $\underline{\Psi}_s \cong \frac{\Psi_0}{z} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right) \exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\rho^2\right)$ .

c) Il faut et il suffit que  $C_s$  soit l'image de  $C_e$  soit  $-\frac{1}{OC_e} + \frac{1}{OC_s} = \frac{1}{f} = -\frac{1}{OF}$  où  $O$

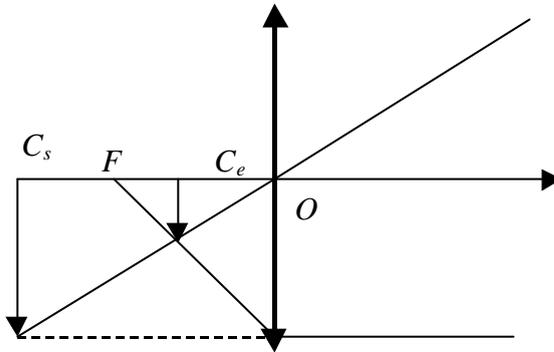
est le centre optique de la lentille et  $F_s$  son foyer objet, puisque les questions posées par l'énoncé concernent la formation de l'image  $C_s$  de l'objet  $C_e$ .

Si on veut que les deux ondes soient divergentes dès leur passage par la lentille, il faut que  $C_e$  et  $C_s$  soient situés avant la lentille, donc que  $C_e$  soit situé entre  $F$  et  $O$ , comme sur le schéma ci-après. Notons toutefois qu'une onde convergente finit toujours, après passage par son point de convergence, par être divergente.

Enfin, l'onde de sortie est une onde plane si le centre de divergence à l'entrée est confondu avec le foyer objet  $C_e$ .



Remarquons que la donnée de  $C_e$  et  $C_s$  permet de déterminer, au moyen d'une construction auxiliaire, la position de  $F$  ; si  $C_e$  est entre  $F$  et  $O$ ,  $C_s$  est situé avant  $F$  sur l'axe optique :

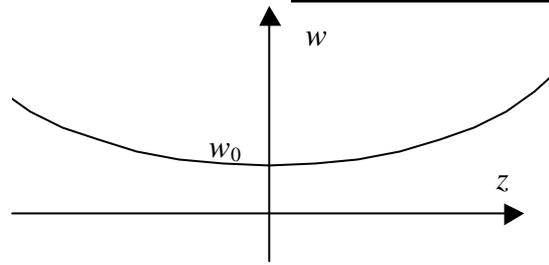


- d) Ici, l'entrée et la sortie du système optique sont au même point et on aura  $\overline{OC_e} = -OC_e = -R_e$  et  $\overline{OC_s} = -OC_s = -R_s$  donc  $-\frac{1}{-R_e} + \frac{1}{-R_s} = \frac{1}{f}$  donc encore

$$\boxed{R_s = \frac{R_e}{1 - \frac{R_e}{f}}}, \text{ fonction homographique } abcd \text{ avec } \boxed{a=1}, \boxed{b=0}, \boxed{c=-1/f} \text{ et } \boxed{d=1}.$$

4. a) On peut d'abord rappeler l'expression proposée en 3.a) pour une onde sphérique ayant, au point considéré, un rayon de courbure  $R$  :  $\underline{\psi}_s(\rho, z) = \frac{F(z)}{z} \exp\left(i\pi \frac{\rho^2}{\lambda R}\right)$ . Si on remplace dans cette expression  $1/R$  par l'expression de  $1/q$  proposée par l'énoncé, on obtient  $\underline{\psi}_g(\rho, z) = \frac{F(z)}{z} \exp\left(i\pi \frac{\rho^2}{\lambda R}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2}\right)$  qui est bien une onde gaussienne.

On a immédiatement  $w = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$  dont le tracé est classique :



b) Remarquons d'abord qu'on peut écrire  $\zeta = \frac{z^2 + z_R^2}{z_R}$  et  $R = \frac{z^2 + z_R^2}{z}$ . On a alors

immédiatement  $q = \frac{R\zeta}{R^2 + \zeta^2}(\zeta - iR)$  ou, après simplifications,  $q = z - iz_R$ , soit  $K = z_R$ .

c) Numériquement,  $z_{Re} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = 1,24\text{m}$ . L'application de la règle *abcd* doit se faire avec soin, les abscisses  $z$  (pour le faisceau d'entrée) et  $z'$  (pour le faisceau de sortie) étant comptées respectivement depuis les positions du waist en entrée ( $z_e$ ) et en sortie ( $z_s$ ) selon  $q_e = (z - z_e) - iz_{Re}$  et  $q_s = (z - z_s) - iz_{Rs}$  pour les rayons de courbure complexes des faisceaux gaussien d'entrée et de sortie. On écrira alors la règle *abcd* (relation de conjugaison), écrite seulement là où elle s'applique c'est-à-dire à la position ( $z = 0$ ) du centre optique de la lentille, par exemple sous la forme

sous la forme  $\frac{1}{q_e} - \frac{1}{q_s} = \frac{1}{f}$  soit  $\frac{1}{z_s + iz_{Rs}} = \frac{1}{z_e + iz_{Re}} + \frac{1}{f}$ . On peut indifféremment l'écrire sous la forme homographique  $-z_s - iz_{Rs} = \frac{-z_e - iz_{Re}}{1 - \frac{-z_e - iz_{Re}}{f}}$  soit en

core  $z_s + iz_{Rs} = f \frac{z_e + iz_{Re}}{f + z_e + iz_{Re}} = f \frac{(z_e + iz_{Re})(f + z_e - iz_{Re})}{(f + z_e)^2 + z_{Re}^2}$ . L'égalité des parties

réelles de ces deux nombres complexes donne  $z_s = f \frac{(f + z_e)z_e + z_{Re}^2}{(f + z_e)^2 + z_{Re}^2}$  tandis que

l'égalité des parties imaginaires permet d'écrire  $z_{Rs} = z_{Re} \frac{f^2}{(f + z_e)^2 + z_{Re}^2}$ ; cette relation sera utilisée plus bas.

d) Le rapport demandé peut s'écrire  $\frac{w_{0s}}{w_{0e}} = \sqrt{\frac{z_{Rs}}{z_{Re}}}$  soit  $\frac{w_{0s}}{w_{0e}} = \frac{f}{\sqrt{(f + z_e)^2 + z_{Re}^2}}$ . Il

suffit de prendre  $z_e = -0,1\text{m}$  et  $f = 0,1\text{m}$  pour obtenir  $z_s = +0,1\text{m}$  et  $\frac{w_{0s}}{w_{0e}} = 0,08$ .

La divergence du faisceau de sortie a été fortement réduite en plaçant le waist du faisceau d'entrée sur le foyer objet de la lentille, ce qui est conforme au rôle attendu du foyer objet de cette lentille convergente.

- e) Au niveau de la lentille ( $z = 0$ ), on a  $R_e = -z_e \left( 1 + \frac{z_{Re}^2}{z_e^2} \right) = 15,5\text{m} > 0$  pour un faisceau divergent ainsi que  $R_s = -z_s \left( 1 + \frac{z_{Rs}^2}{z_s^2} \right) = -0,10\text{m} < 0$  pour ce faisceau qui est convergent. Finalement, les abscisses des divers points considérés sont :

| point | $W_e$   | $W_s$   | $C_e$  | $C_s$   |
|-------|---------|---------|--------|---------|
| $z$   | - 0,10m | + 0,10m | -15,5m | + 0,10m |

$W_e$  et  $W_s$  ne sont pas conjugués ; par contre,  $C_e$  (qui est *presque* à l'infini) admet *presque* pour conjugué  $C_s$  (qui est au foyer image de la lentille).

Ainsi, une onde qui semble diverger très peu en entrée va, après la lentille, converger au foyer image, comme dans le cadre des ondes sphériques : ce résultat est encore conforme au rôle attendu du foyer image d'une lentille.