

THERMODYNAMIQUE

I- Étude préliminaire

1- Conduction thermique

1-a- $J(x,t)$ représente le transfert thermique (ou la quantité de chaleur) traversant une section unité perpendiculaire à l'axe des x , dans le sens de \vec{u}_x , pendant 1 seconde. C'est une grandeur algébrique qui s'exprime en W.m^{-2} . La loi de Fourier précise que cette grandeur est proportionnelle au gradient de température et que l'écoulement de transfert thermique s'effectue dans le sens des températures décroissantes, soit $J(x,t) = -\lambda \cdot \text{grad } T$

1-b- Considérons comme système la tranche comprise entre x et $x + dx$. Un bilan d'enthalpie pendant la durée dt donne : $dH = \rho \cdot S \cdot c \cdot dx \cdot dT = (J(x) - J(x+dx))Sdt = -\partial J / \partial x \cdot S \cdot dx \cdot dt$. Pour un système unidirectionnel, $J(x,t) = -\lambda \cdot \partial T / \partial x$,

ce qui donne l'équation de la chaleur $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

1-c- En régime stationnaire (indépendant du temps), $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$. Compte-tenu des conditions aux limites, on a

$T(x) = (T_L - T_0) \frac{x}{L} + T_0$ et $J(x) = \frac{\lambda}{L} (T_0 - T_L)$

2- Résistance thermique due à la conduction

2-a- Par définition, on a $P_{th} = J \cdot S$ et donc $P_{th} = \frac{\lambda S}{L} (T_0 - T_L)$, ce qui permet d'écrire $T_0 - T_L = \frac{L}{\lambda S} P_{th}$. En électricité, la loi d'Ohm sous forme intégrale s'écrit $V_0 - V_L = R_e \cdot I$ avec, pour un conducteur de longueur L et de section S , $R_e = \frac{L}{\sigma S}$ où σ est la conductivité électrique du matériau. La puissance thermique est l'analogue de l'intensité électrique, la température est l'analogue du potentiel électrostatique et la résistance thermique $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$ est l'analogue de la résistance électrique.

On a donc $T_0 - T_L = \frac{L}{\lambda S} P_{th} = R_{th} \cdot P_{th}$ avec R_{th} en K.W^{-1} . Pour une différence de température donnée, le flux thermique sera d'autant plus faible que la résistance thermique sera élevée.

2-b- Pour A_1 , on a $T_0 - T_1 = R_{th1} \cdot P_{th}$ et pour A_2 , on a $T_1 - T_2 = R_{th2} \cdot P_{th}$ avec la même puissance P_{th} puisqu'il n'y a pas de fuites latérales. On obtient alors $T_0 - T_2 = (R_{th1} + R_{th2}) \cdot P_{th}$, soit $R_{th} = R_{th1} + R_{th2}$: les résistances thermiques s'ajoutent pour des matériaux montés en série (les uns derrière les autres).

2-c- Cette fois-ci, $P_{th} = P_{th1} + P_{th2}$, ce qui conduit à $G_{th} = G_{th1} + G_{th2}$ si G_{th} est la conductance thermique, l'inverse de la résistance thermique.

3- Transfert convectif

Pour un transfert convectif, $T - T_a = \frac{1}{h_c S} P_c$ définit une résistance thermique de convection $R_c = \frac{1}{h_c S}$.

4- Transfert par rayonnement

4-a- On donne $P_R = \int_0^\infty \frac{2\pi h \nu^3}{c^2 \left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right)} d\nu$. Posons $x = \frac{h\nu}{kT}$ et donc $dx = \frac{h}{kT} d\nu$. On obtient alors

l'intégrale $P_R = \int_0^\infty \frac{2\pi h \left(\frac{kT}{h} x\right)^3}{c^2 (\exp(x) - 1)} \frac{kT}{h} dx = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} T^4$, soit $P_R = \sigma \cdot T^4$ avec $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2}$

4-b- Pour l'atmosphère, on obtient, pour $T_e = 263 \text{ K}$, $\lambda_{ma} = 11,0 \mu\text{m}$, situé dans l'infrarouge. Pour le soleil, on obtient, pour $T_s = 5700 \text{ K}$, $\lambda_{ms} = 0,508 \mu\text{m}$, situé dans le visible.

4-c- Le corps de surface S et à la température T émet la puissance totale $P_R = \sigma \cdot S \cdot T^4$ tandis qu'il reçoit de l'environnement $P_{Re} = \sigma \cdot S \cdot T_e^4$, d'où un bilan donnant $P = \sigma \cdot S \cdot (T^4 - T_e^4)$ sortant du corps.

4-d- Pour $T = T_e + \Delta T$ avec $\Delta T \ll T_e$, on a $T^4 = T_e^4 \left(1 + 4 \frac{\Delta T}{T_e} \right)$ et donc $T^4 - T_e^4 = 4T_e^3(T - T_e)$. On obtient

donc $P = 4\sigma S T_e^3(T - T_e) = G(T - T_e)$ avec $G = 4\sigma S T_e^3 = 1/R_R$

4-e- Les puissances liées au rayonnement et à la convection s'ajoutent, avec une même expression de ΔT pour les deux phénomènes. On obtient donc $P_{TOT} = (hS + 4\sigma S T_e^3)(T - T_e) = (T - T_e)/R$ avec $R = 1/(hS + 4\sigma S T_e^3)$.

II- Transfert à travers le mur séparant le local de l'extérieur.

1-a- Entre l'extérieur et l'intérieur, les résistances thermiques s'ajoutent, soit $R_{t1} = R_{th} + R_{ext} + R_{int}$.

On a, d'après les questions précédentes, $R_{t1} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_e S + 4\sigma S T_{ext}^3} + \frac{1}{h_i S + 4\sigma S T_{int}^3}$. La puissance thermique P_{t1} s'exprime par

$$P_{t1} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{t1}}$$

1-b- A.N. : $R_{t1} = 3,80 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ et $P_{t1} = 526 \text{ W}$.

1-c- De la même façon, on a $R_{t2} = \frac{e_b}{\lambda_b S_b} + \frac{1}{h_e S_b + 4\sigma S_b T_{ext}^3} + \frac{1}{h_i S_b + 4\sigma S_b T_{int}^3}$.

A.N. : $R_{t2} = 0,136 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ et $P_{t2} = 147 \text{ W}$.

On constate que le béton est moins responsable des fuites thermiques. En fait, le verre possède une épaisseur 100 fois plus faible que le béton mais conduit à des pertes comparables. En mettant une épaisseur de verre plus importante ou, mieux, en mettant un double vitrage, on réduira les pertes liées au verre.

1-d- Pour une paroi uniquement vitrée, alors $R'_{t1} = 2/5 \cdot R_{t1}$ et donc $P'_{t1} = 5/2 \cdot P_{t1} = 1315 \text{ W}$. Les fuites thermiques seraient plus importantes, mais on a toujours un verre de faible épaisseur.

2-a- En régime stationnaire, les flux thermiques à travers S_1 et S_2 sont égaux à P_0 . On aura, au niveau de la surface intérieure, $T_{int} - T_1 = R_{int} \cdot P_0$ avec $R_{int} = \frac{1}{h_i S + 4\sigma S T_1^3}$, d'où $T_{int} - T_1 = \frac{P_0}{h_i S + 4\sigma S T_1^3}$.

2-b- L'intérieur du verre est uniquement le siège d'un phénomène de conduction thermique, d'où

$$T_1 - T_2 = \frac{e}{\lambda S} P_0$$

2-c- On a $P_0 = h_e S(T_2 - T_{ext}) + S\sigma T_2^4 - S\sigma T_{ciel}^4$ en faisant un bilan énergétique sur la face de sortie S_2 . Avec $T_2 = T_{ext} + \Delta T_2$ avec $\Delta T_2 \ll T_{estb}$, on obtient $P_0 = h_e S \Delta T_2 - S\sigma T_{ciel}^4 + S\sigma T_{ext}^4 + 4S\sigma T_{ext}^3 \Delta T_2$, ce qui permet d'écrire

$$\Delta T_2 = T_2 - T_{ext} = \frac{P_0 - S\sigma(T_{ext}^4 - T_{ciel}^4)}{h_e S + 4S\sigma T_{ext}^3}. \text{ On peut poser } f(T_{ext}, T_{ciel}) = S\sigma(T_{ext}^4 - T_{ciel}^4)$$

2-d- $\Delta T_2 = 6,47 \text{ K}$ d'où $T_2 = 279,5 \text{ K}$. $T_1 = T_2 + \frac{e}{\lambda S} P_0$ donne $T_1 = 280,2 \text{ K}$. $T_{int} = T_1 + \frac{P_0}{h_i S + 4\sigma S T_1^3}$ donne

$T_{int} = 295,2 \text{ K}$, soit $22,2^\circ \text{C}$.

La conduction dans le verre est égale à $P_0 = 1500 \text{ W}$.

La convection extérieure est égale à $h_e S(T_2 - T_{ext}) = 1138 \text{ W}$, soit 76 % de P_0 .

Le rayonnement extérieur est égal à $S\sigma(T_2^4 - T_{ciel}^4) = 374 \text{ W}$, soit 24 % de P_0 . La convection est 3 fois plus importante que le rayonnement.

La convection intérieure est égale à $h_i S(T_{int} - T_1) = 1125 \text{ W}$, soit 75 % de P_0 . La convection est encore 3 fois plus importante que le rayonnement.

2-e- Pour $h_e = 60 \text{ Wm}^{-2}\text{K}$, on obtient $\Delta T_2 = 3,97 \text{ K}$ d'où $T_2 = 277 \text{ K}$. $T_1 = T_2 + \frac{e}{\lambda S} P_0$ donne $T_1 = 277,7 \text{ K}$.

$T_{int} = T_1 + \frac{P_0}{h_i S + 4\sigma S T_1^3}$ donne $T_{int} = 292,7 \text{ K}$, soit $19,7^\circ \text{C}$, température qui a baissé(c'est évident...) mais qui demeure une température tout à fait raisonnable.

3-a- A travers une vitre, on a vu au **2-b-** que $T_{1a} - T_{1b} = \frac{e}{\lambda S} P_0 = 0,7 \text{ K}$, ce qui fait que l'on peut considérer que $T_{1a} \approx T_{1b}$ et de même $T_{2a} \approx T_{2b}$.

3-b- La relation de **2-a-** $T_{int} - T_1 = \frac{P_0}{h_i S + 4\sigma S T_1^3}$ ne fait intervenir que la vitre et la surface intérieure : la relation n'est donc pas modifiée.

3-c- L'air n'est le siège que d'une conduction thermique donc, par analogie avec le **2-b-** en remplaçant e par e' et λ par λ' , $T_1 - T_2 = \frac{e'}{\lambda' S} P_0$.

3-d- La démonstration est la même qu'au **2-c-** et conduit donc à la même expression

$$T_2 - T_{ext} = \frac{P_0 - S\sigma(T_{ext}^4 - T_{ciel}^4)}{h_e S + 4S\sigma T_{ext}^3}$$

3-e- $\Delta T_2 = 6,47 \text{ K}$ d'où $T_2 = 279,5 \text{ K}$ (inchangé). $T_1 = T_2 + \frac{e'}{\lambda' S} P_0$ donne $T_1 = 339,5 \text{ K}$.

$T_{int} = T_1 + \frac{P_0}{h_i S + 4\sigma T_1^3}$ donne $T_{int} = 352 \text{ K}$, soit $79 \text{ }^\circ\text{C}$, ce qui est « un peu chaud » : il n'est pas nécessaire de fournir une puissance P_0 aussi importante.

Pour $P'_0 = P_0/2$, on obtient $\Delta T_2 = 2,71 \text{ K}$ d'où $T_2 = 275,7 \text{ K}$. $T_1 = T_2 + \frac{e'}{\lambda' S} P_0$ donne $T_1 = 305,7 \text{ K}$ et $T_{int} = 313,3 \text{ K}$ soit $40,3 \text{ }^\circ\text{C}$, ce qui est plus raisonnable mais encore élevé. On peut donc encore réduire la puissance de chauffe (ou améliorer le modèle proposé...).

MÉCANIQUE

I- Étude de l'effet de marée

1- \mathcal{R}_T est en translation elliptique, donc non rectiligne, par rapport au référentiel de Copernic : il n'est pas galiléen (il peut être considéré comme galiléen sur des durées courtes, de l'ordre de 3 mois).

2- Le principe fondamental de la dynamique dans \mathcal{R}_T s'écrit : $\sum \vec{F} = m \vec{a}(P)_{/R_T} = \vec{F}_{physique} + \sum \vec{F}_{inertie}$.

La force d'inertie de Coriolis est nulle puisque le référentiel est en translation.

La force d'inertie d'entraînement pour un référentiel en translation s'écrit $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e = -m \vec{a}(T)_{/R}$.

On obtient finalement avec $\vec{F}_{physique} = m \vec{G}_T(P) + m \vec{G}_L(P) + m \vec{G}_S(P) + \vec{F}$:

$$m \vec{a}(P)_{/R_T} = m \vec{G}_T(P) + m \vec{G}_L(P) + m \vec{G}_S(P) + \vec{F} - m \vec{a}(T)_{/R}$$

3-a- Le théorème du centre d'inertie dit que $m \vec{a}(T)_{/R} = \sum \vec{F}_{extérieurs}$. Or, pour chaque particule A_i de masse

m_i constituant la Terre, on a $\vec{F}_i = m_i \left(\vec{G}_S(A_i) + \vec{G}_L(A_i) \right) = m_i \left(\vec{G}_S(T) + \left[\left(\vec{T}A_i \cdot \text{grad} \right) \vec{G}_S \right]_T + \vec{G}_L(T) + \left[\left(\vec{T}A_i \cdot \text{grad} \right) \vec{G}_L \right]_T \right)$

$$\sum_i \vec{F}_i = \left(\sum_i m_i \right) \left(\vec{G}_S(T) + \vec{G}_L(T) \right) + \sum_i \left(m_i \vec{T}A_i \cdot \text{grad} \right)_T \left(\vec{G}_S + \vec{G}_L \right)$$

Or $\sum_i \left(m_i \vec{T}A_i \cdot \text{grad} \right)_T = \sum_i \left(m_i \vec{T}A_i \right) \text{grad}_T = \vec{0}$ et $\sum_i m_i = m$, ce qui permet d'obtenir $\vec{a}(T)_{/R} = \vec{G}_S(T) + \vec{G}_L(T)$

3-b- On peut donc écrire $m \vec{a}(P)_{/R_T} = m \vec{G}_T(P) + m \vec{G}_L(P) + m \vec{G}_S(P) - m \left(\vec{G}_S(T) + \vec{G}_L(T) \right)$, soit

$$m \vec{a}(P)_{/R_T} = m \vec{G}_T(P) + m \left(\vec{G}_L(P) - \vec{G}_L(T) \right) + m \left(\vec{G}_S(P) - \vec{G}_S(T) \right) \text{ ou } m \vec{a}(P)_{/R_T} = m \vec{G}_T(P) + m \vec{C}_L(P) + m \vec{C}_S(P)$$

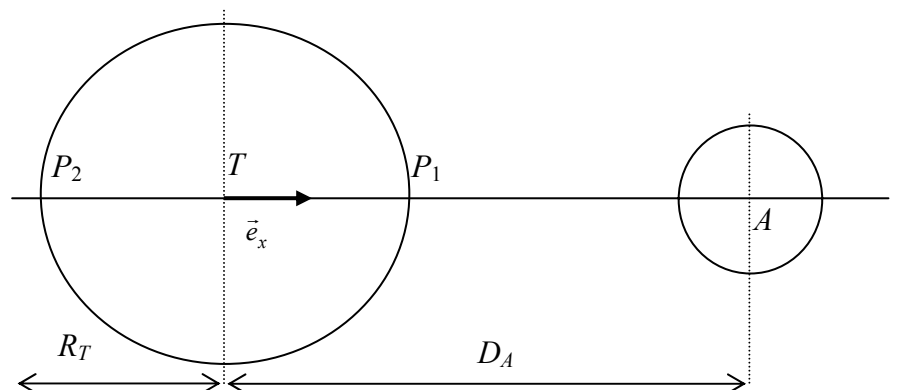
4- Pour un astre à symétrie sphérique, $\vec{G}_A(P) = -\frac{G \cdot m_A}{PA^2} \vec{u}_{AP}$. On a

donc $\vec{G}_A(P_1) = +\frac{G \cdot m_A}{(D_A - R_T)^2} \vec{e}_x$ et

$$\vec{G}_A(P_2) = +\frac{G \cdot m_A}{(D_A + R_T)^2} \vec{e}_x$$

On peut donc déterminer :

$$\vec{C}_A(P_1) = +\frac{G \cdot m_A}{(D_A - R_T)^2} \vec{e}_x - \frac{G \cdot m_A}{D_A^2} \vec{e}_x$$



$$\vec{C}_A(P_1) = \frac{G \cdot m_A}{D_A^2} \vec{e}_x \left(\left(1 - \frac{R_T}{D_A} \right)^{-2} - 1 \right) \approx 2 \frac{G \cdot m_A R_T}{D_A^3} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{C}_A(P_2) = \frac{G \cdot m_A}{D_A^2} \vec{e}_x \left(\left(1 + \frac{R_T}{D_A} \right)^{-2} - 1 \right) \approx -2 \frac{G \cdot m_A R_T}{D_A^3} \vec{e}_x$$

$$\vec{C}_A(P_1) = -\vec{C}_A(P_2) \approx 2 \frac{G \cdot m_A R_T}{D_A^3} \vec{e}_x$$

A.N. : Pour la Lune, $2 \frac{G \cdot m_L R_T}{D_L^3} = 1,10 \cdot 10^{-6} \text{ ms}^{-2}$ et pour le Soleil, $2 \frac{G \cdot m_S R_T}{D_S^3} = 5,01 \cdot 10^{-7} \text{ ms}^{-2}$: la contribution du Soleil est deux fois plus faible que celle de la Lune.

II- Trajectoire de la Lune

1-a- Le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique s'écrit $\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M}^* = \vec{0}$ car le

système Terre-Lune est isolé. On aura donc $\vec{L}^*(T, L) = \text{cste}$.

1-b- Comme $\vec{L}_T(T)_{/R_T} = J_T \cdot \vec{\Omega}_T$ et $\vec{L}_L(L)_{/R_L} = J_L \cdot \vec{\Omega}_L$ sont constants, les vecteurs rotation propre sont constants.

2-a- Par définition, $\vec{L}_C^*(T) = \sum_{A_i} \vec{CA}_i \wedge m_i \vec{v}_i^*$. Or $\vec{v}_i^* = \vec{v}^*(T) + \vec{A}_i T \wedge \vec{\Omega}_T$ et $\vec{CA}_i = \vec{CT} + \vec{TA}_i$. On obtient

donc $\vec{L}_C^*(T) = \sum_{A_i} (\vec{CT} + \vec{TA}_i) \wedge m_i (\vec{v}^*(T) + \vec{A}_i T \wedge \vec{\Omega}_T)$. Comme $\sum_{A_i} m_i \vec{TA}_i = \vec{0}$ (définition du barycentre T de la Terre), et

que les points de la Terre sont uniquement en rotation dans le référentiel R_T avec le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}_T$ ce qui s'écrit $\vec{v}(A_i)_{/R_T} = \vec{A}_i T \wedge \vec{\Omega}_T$, on obtient en développant l'expression de $\vec{L}_C^*(T)$:

$\vec{L}_C^*(T) = \vec{CT} \wedge m_T \vec{v}^*(T) + \sum_{A_i} (\vec{TA}_i) \wedge m_i (\vec{v}(A_i)_{/R_T})$. La deuxième partie représente la définition de $\vec{L}_T(T)_{/R_T}$. On aboutit

$$\vec{L}_C^*(T) = \vec{L}_T(T)_{/R_T} + \vec{CT} \wedge m_T \vec{v}^*(T)$$

2-b- Par analogie, on obtient $\vec{L}_C^*(L) = \vec{L}_L(L)_{/R_L} + \vec{CL} \wedge m_L \vec{v}^*(L)$.

2-c- $\vec{L}^*(T, L) = \vec{L}_C^*(T) + \vec{L}_C^*(L) = \vec{L}_T(T)_{/R_T} + \vec{CT} \wedge m_T \vec{v}^*(T) + \vec{L}_L(L)_{/R_L} + \vec{CL} \wedge m_L \vec{v}^*(L)$. On peut donc écrire $\vec{L}^*(T, L) = \vec{L}_T(T)_{/R_T} + \vec{L}_L(L)_{/R_L} + \vec{L}^*_{orb}$ avec $\vec{L}^*_{orb} = \vec{CT} \wedge m_T \vec{v}^*(T) + \vec{CL} \wedge m_L \vec{v}^*(L)$

3-a- Comme C est le barycentre de T et L, on a $m_L \vec{CL} + m_T \vec{CT} = \vec{0}$. On déduit, en utilisant la relation de

Chasles, que $\vec{CL} = \frac{m_T}{m_T + m_L} \vec{TL}$ et $\vec{CT} = -\frac{m_L}{m_T + m_L} \vec{TL}$.

Les vitesses se définissent par $\vec{v}_{T/R^*} = \frac{d(\vec{CT})}{dt} = -\frac{m_L}{m_L + m_T} \frac{d(\vec{CM})}{dt}$, soit $\vec{v}_{T/R^*} = -\frac{m_L}{m_L + m_T} \vec{v}_{M/R^*}$. De même, on obtient

$$\vec{v}_{L/R^*} = \frac{m_T}{m_L + m_T} \vec{v}_{M/R^*}$$

3-b- La relation fondamentale de la dynamique s'écrit, dans \mathcal{R}^* : $m_L \frac{d \vec{v}_{L/R^*}}{dt} = \frac{m_L m_T}{m_L + m_T} \frac{d \vec{v}_{M/R^*}}{dt} = \vec{F}_{T/L}$

et $m_T \frac{d \vec{v}_{T/R^*}}{dt} = -\frac{m_L m_T}{m_L + m_T} \frac{d \vec{v}_{M/R^*}}{dt} = \vec{F}_{L/T} = -\vec{F}_{T/L}$. On constate donc que la particule fictive de masse $\mu = \frac{m_L m_T}{m_L + m_T}$ est soumise à la force $\vec{F}_{T/L}$.

4-a- $\vec{L}^*_{orb} = \vec{CT} \wedge m_T \vec{v}_{(T)/R^*} + \vec{CL} \wedge m_L \vec{v}_{(L)/R^*} = -\vec{CT} \wedge \frac{m_L m_T}{m_L + m_T} \vec{v}_{M/R^*} + \vec{CL} \wedge \frac{m_L m_T}{m_L + m_T} \vec{v}_{M/R^*}$, soit

$$\vec{L}^*_{orb} = \vec{TL} \wedge \frac{m_L m_T}{m_L + m_T} \vec{v}_{M/R^*} = \vec{CM} \wedge \mu \vec{v}_{M/R^*} : \text{le moment cinétique orbital est celui de la particule fictive.}$$

Le théorème du moment cinétique appliqué en C fixe dans \mathcal{R}^* , $\frac{d \vec{L}^*_{orb}}{dt} = \vec{CM} \wedge \vec{F}_{T/L} = \vec{0}$ car \vec{CM} et $\vec{F}_{T/L}$ sont colinéaires.

\vec{L}^*_{orb} est donc constant et peut s'écrire $\mu \vec{c}$. A chaque instant, le vecteur \vec{CM} est perpendiculaire à \vec{c} . Le point C étant fixe, le point M est dans le plan perpendiculaire à \vec{c} passant par le point C (qui est le plan contenant C, M_0 et \vec{v}_0).

4-b- Si $m_T \gg m_L$, alors C est en T, M est en L et \mathcal{R}^* est confondu avec \mathcal{R}_T .

5-a- La formule de Binet relative à $u(\theta)$ s'écrit : $\vec{a} = -c^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \vec{e}_r$. La force agissant sur L s'écrit

$$\vec{F}_{T/L} = -\frac{Gm_L m_T}{TL^2} u_{TL} \vec{e}_r = -Gm_L m_T u^2 \vec{e}_r = m_L \vec{a} = -m_L c^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \vec{e}_r, \text{ d'où } \boxed{u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{Gm_T}{c^2}}$$
 où c est la constante des aires.

Les solutions sont du type $u = \frac{Gm_T}{c^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$ et par un choix judicieux de l'axe des références, on obtient

$$u = \frac{Gm_T}{c^2} \left(1 + \frac{Ac^2}{Gm_T} \cos \theta \right) \text{ et donc } r = \frac{\frac{c^2}{Gm_T}}{1 + \frac{Ac^2}{Gm_T} \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \text{ où } p \text{ est le paramètre et } e \text{ l'excentricité de la conique.}$$

5-b- $r_p = \frac{p}{1+e}$ et $r_a = \frac{p}{1-e}$, ce qui donne $e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = 0,0547$ et $p = \frac{2r_a r_p}{r_a + r_p} = 382,9 \cdot 10^3 \text{ km}$.

5-c- L'excentricité est très faible, donc la trajectoire est presque circulaire. Son rayon est environ

$$D_L = \frac{r_a + r_p}{2} = 384 \cdot 10^3 \text{ km} \text{ (valeur qui coïncide bien avec les données). Comme le mouvement est circulaire, la conservation du moment cinétique orbital impose que ce mouvement soit uniforme. On peut alors écrire}$$

$$\vec{F}_{T/L} = -m_L \omega_L^2 D_L \vec{e}_r = -\frac{Gm_L m_T}{D_L^2} \vec{e}_r \text{ et donc } \omega_L^2 = \frac{Gm_T}{D_L^3}, \text{ soit } \omega_L = \sqrt{\frac{Gm_T}{D_L^3}} = 2,65 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}. \text{ On en déduit la vitesse de la}$$

$$\text{Lune } v_L = D_L \omega_L = 1,02 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

6-a- $\|\vec{L}^*_{orb}\| = D_L m_L v_L = 2,87 \cdot 10^{34} \text{ kg.m}^2 \text{ s}^{-1}$ et $\|\vec{L}_T(T)_{/R_T}\| = J_T \Omega_T = \frac{2}{5} m_T R_T^2 \Omega_T = 7,08 \cdot 10^{33} \text{ kg.m}^2 \text{ s}^{-1}$ et

$$\|\vec{L}_L(L)_{/R_L}\| = J_L \Omega_L = \frac{2}{5} m_L R_L^2 \Omega_L = 2,39 \cdot 10^{29} \text{ kg.m}^2 \text{ s}^{-1}. \text{ On constate donc que } \|\vec{L}_L(L)_{/R_L}\| \ll \|\vec{L}_T(T)_{/R_T}\| < \|\vec{L}^*_{orb}\|.$$

6-b- Comme le moment cinétique de L est négligeable, on a

$$\vec{L}^*(T, L) = \vec{L}^*_{orb} + \vec{L}_T(T)_{/R_T} = D_L m_L v_L \vec{k} + J_T \Omega_T \vec{k}. \text{ Pour le mouvement circulaire uniforme de la Lune autour de la Terre,}$$

$$\text{on a } \frac{m_L v_L^2}{D_L} = \frac{Gm_T m_L}{D_L^2} \text{ et donc } D_L m_L v_L = m_L \sqrt{Gm_T D_L}. \text{ On en déduit } \vec{L}^*(T, L) \approx (m_L \sqrt{Gm_T D_L} + J_T \Omega_T) \vec{e}_z.$$

III- Éloignement de la Lune

1- La masse d'eau est égal à $m_b = \frac{4}{3}\pi ab^2 \rho - \frac{4}{3}\pi R_T^3 \rho$. Comme $a = R_T + h = b + h$, il vient

$$m_b = \frac{4}{3}\pi R_T^2 h \rho = 8,50 \cdot 10^{16} \text{ kg}$$

$$2- \vec{M}_1 = \vec{TP}_1 \wedge \vec{F}_1 = \frac{1}{2} m_b \vec{TP}_1 \wedge \vec{C}_L(P_1) = \frac{1}{2} m_b \vec{TP}_1 \wedge (\vec{G}_L(P_1) - \vec{G}_L(T))$$

$$\vec{M}_2 = \frac{1}{2} m_b \vec{TP}_2 \wedge \vec{C}_L(P_2) = \frac{1}{2} m_b \vec{TP}_2 \wedge (\vec{G}_L(P_2) - \vec{G}_L(T)) \text{ avec } \vec{TP}_2 = -\vec{TP}_1$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \frac{1}{2} m_b \vec{TP}_2 \wedge (\vec{G}_L(P_2) - \vec{G}_L(T) - \vec{G}_L(P_1) + \vec{G}_L(T)) \text{ d'où } \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \frac{1}{2} m_b \vec{TP}_1 \wedge (\vec{G}_L(P_1) - \vec{G}_L(P_2))$$

3-a- En projection sur \vec{e}_z , on peut écrire $M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(J_T \Omega_T)}{dt} = J_T \frac{d\Omega_T}{dt} = -\frac{A \sin(2\alpha)}{D_L^3}$ et donc :

$$\frac{d\Omega_T}{dt} = -\frac{A \sin(2\alpha)}{J_T D_L^3} = -\frac{\frac{3}{2} G m_b m_L (R+h)^2 \sin(2\alpha)}{J_T D_L^3} = -4,64 \cdot 10^{-22} \text{ rad.s}^{-2}$$

$$3-b- T = \frac{2\pi}{\Omega_T} \text{ donne, en dérivant : } \frac{dT}{dt} = -\frac{2\pi}{\Omega_T^2} \frac{d\Omega_T}{dt}$$

A.N. : $\frac{dT}{dt} = 5,48 \cdot 10^{-13} \text{ (s/ seconde)} = 1,73 \cdot 10^{-5} \text{ s/ an}$, valeur cohérente avec $1,65 \cdot 10^{-5} \text{ s/an}$.

3-c- Le moment cinétique $\vec{L}^*(T, L) \approx (m_L \sqrt{G m_T D_L} + J_T \Omega_T) \vec{e}_z$ est constant, donc $m_L \sqrt{G m_T D_L} + J_T \Omega_T = cste$. En dérivant par rapport au temps, on obtient $\frac{1}{2\sqrt{D_L}} m_L \sqrt{G m_T} \frac{dD_L}{dt} + J_T \frac{d\Omega_T}{dt} = 0$, ce qui donne

$$\frac{dD_L}{dt} = -\frac{2 J_T \sqrt{D_L}}{m_L \sqrt{G m_T}} \frac{d\Omega_T}{dt} = -\frac{4}{5} \sqrt{\frac{m_T D_L}{G}} \frac{R_T^2}{m_L} \frac{d\Omega_T}{dt}$$

A.N. : $\frac{dD_L}{dt} = 1,204 \cdot 10^{-9} \text{ m/s} = 3,8 \text{ cm/an}$, ce qui correspond à un écart de près de 12% avec la réalité. Ce modèle est donc acceptable.