Jacki LUCAS jackilucas@aol.com
Jean-Marie DELORME delorme.jean-marie@wanadoo.fr
François-Xavier COQ francois.coq@ac-orleans-tours.fr
Lycée POTHIER ORLEANS

Si vous notez des erreurs, merci de nous les signaler.

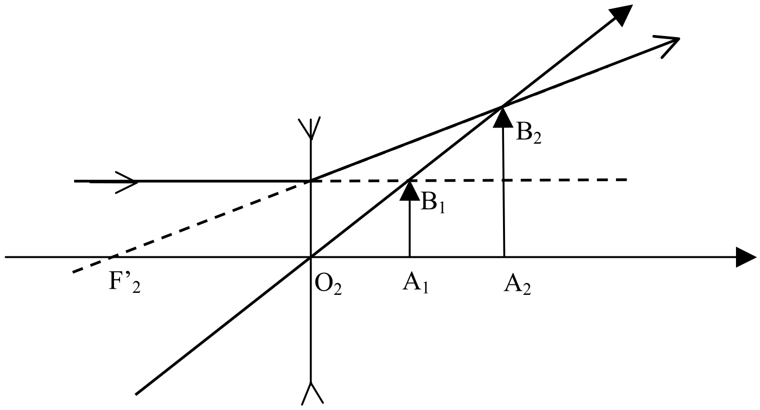
2004 CCP MP Physique 2

PARTIE A - OPTIQUE

I – Étude géométrique

1. Les étoiles émettent des faisceaux de lumière parallèle (Ondes électromagnétiques planes), celui provenant de E_a parallèle à l'axe optique de la lunette, l'autre provenant de E_b faisant un angle θ avec cet axe optique.

2.a. A_1 et B_1 se trouvent dans le plan focal image de la lentille L_1. $\boxed{\overline{A_1B_1} = f'_1.\tan\theta \approx f'_1.\theta}$



2.b. $\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_2A_1}} = 2$ et $\dfrac{1}{\overline{O_2A_2}} - \dfrac{1}{\overline{O_2A_1}} = \dfrac{1}{f'_2}$

donnent $\boxed{\overline{O_2A_1} = -\dfrac{1}{2}f'_2 = 1{,}25 \text{ cm}}$

3.a. $\overline{A_2B_2} = f'.\theta = f'\dfrac{\overline{A_1B_1}}{f'_1}$ donne $\boxed{f' = 2f'_1}$.

3.b. $\boxed{\overline{A_1A_2} = \overline{O_2A_2} - \overline{O_2A_1} = \overline{O_2A_1} = 1{,}25 \text{ cm}}$

L'encombrement est plus important avec cette association de deux lentilles, mais l'image finale est plus grande, ce qui permettra de mieux séparer les images des deux étoiles.

4. $\overline{A_2B_2}_{\min} = 2f'_1\,\theta_{\min} = 9\ \mu\text{m}$, ce qui donne $\boxed{\theta_{\min} = 6{,}0.10^{-7} \text{ rad} = 0{,}12 \text{ seconde d'arc}}$. De même, on aura $\boxed{\theta_{\max} = 768 * \theta_{\min} = 1{,}6 \text{ minute d'arc}}$.

II – Pouvoir séparateur de la lunette dû à la diffraction

A. Préliminaires

1. Principe de Huygens-Fresnel : La pupille diffractante est équivalente à un ensemble de sources secondaires émettrices d'ondes sphériques secondaires réparties continûment à la surface de la pupille. L'amplitude d'une onde sphérique est proportionnelle à la surface dS occupée par la source secondaire, à l'amplitude de l'onde incidente arrivant sur la source secondaire, à une constante de proportionnalité caractéristique du dispositif utilisé, à la transmission de la pupille et au déphasage lié à la position relative des points sur la source secondaire.

Pour une diffraction à l'infini, on supposera que les distances *O'M*, *OP* et *OO'* sont très grandes par rapport aux dimensions de l'ouverture, ce qui se traduit également par *O'P* petit par rapport à *OO'* et *OM* petit par rapport à *OO'*.

2. Comme on observe la diffraction à l'infini, placer une lentille convergente permet d'observer la figure de diffraction dans le plan (π), le plan focal de la lentille L_3. On aura $\boxed{X_P = \alpha.f'_3 \text{ et } Y_P = \beta.f'_3}$.

3. L'amplitude complexe de l'onde s'écrit :

$$\underline{A}'(P) = K_1\int_{-a/2}^{+a/2}\int_{-b/2}^{+b/2}\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_i - \vec{u}).\overrightarrow{CM}\right)dS = K_1\int_{-a/2}^{+a/2}\int_{-b/2}^{+b/2}\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_i - \vec{u})\left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM}\right)\right)dS$$

$$\underline{A}'(P) = K_1 \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_i - \vec{u})\left(\overrightarrow{CO} \right)\right) \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_i - \vec{u})\left(\overrightarrow{OM} \right)\right) dS$$

$$\underline{A}'(P) = \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_i - \vec{u})\left(\overrightarrow{CO} \right)\right) K_1 \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_i - \vec{u})\left(\overrightarrow{OM} \right)\right) dS$$

Comme $\overrightarrow{CO} = d_x\vec{u}_x + d_y\vec{u}_y$, on obtient

$$\underline{A}'(P) = \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_i - \vec{u}).\left(d_x\vec{u}_x + d_y\vec{u}_y\right)\right) K_1 \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_i - \vec{u})\left(\overrightarrow{OM} \right)\right) dS$$, ce qui peut s'écrire :

$$\underline{A}'(P) = \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_i - \vec{u}).\left(d_x\vec{u}_x + d_y\vec{u}_y\right)\right)\underline{A}(P) \text{ soit } \boxed{\underline{A}'(P) = \exp\left(jh\left(d_x, d_y\right)\right)\underline{A}(P)} \text{ avec}$$

$$\boxed{h(d_x, d_y) = \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_i - \vec{u}).\left(d_x\vec{u}_x + d_y\vec{u}_y\right)}$$

B. Application : diffraction par la lunette

1.a. L'élément diffractant est le carré placé devant la lunette puisqu'il est inclus dans l'ouverture de la lunette.

Pour une incidence normale, $\vec{u}_i = \vec{u}_z$ et donc $\vec{u}_i.\overrightarrow{OM} = 0$. Par ailleurs, $\vec{u}.\overrightarrow{OM} = \alpha.x + \beta.y + \gamma.0 = \alpha.x + \beta.y$

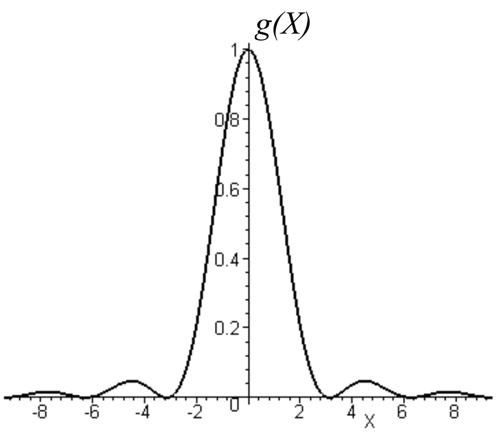
et $\alpha = \dfrac{X_P}{f'_1}$ et $\beta = \dfrac{Y_P}{f'_1}$. Comme d$S$ = dx.dy, on obtient l'intégrale suivante pour $\underline{A}(P)$:

$$\underline{A}(P) = K_1 \int_{-a/2}^{+a/2} \exp\left(-j\frac{2\pi X_P}{\lambda f'_1}x\right)dx.\int_{-a/2}^{+a/2} \exp\left(-j\frac{2\pi Y_P}{\lambda f'_1}y\right)dy$$

$$\int_{-a/2}^{+a/2} \exp\left(-j\frac{2\pi X_P}{\lambda f'_1}x\right)dx = \frac{\left[\exp\left(-j\frac{2\pi X_P}{\lambda f'_1}x\right)\right]_{-a/2}^{+a/2}}{-j\frac{2\pi X_P}{\lambda f'_1}} = \frac{\exp\left(-j\frac{\pi X_P}{\lambda f'_1}a\right) - \exp\left(j\frac{\pi X_P}{\lambda f'_1}a\right)}{-j\frac{2\pi X_P}{\lambda f'_1}}$$

$$= \frac{-2j\sin\left(\frac{\pi X_P}{\lambda f'_1}a\right)}{-j\frac{2\pi X_P}{\lambda f'_1}} = a\sin c\left(\frac{\pi X_P}{\lambda f'_1}a\right)$$

On obtient donc $\boxed{\underline{A}(P) = a^2 K_1 \sin c\left(\frac{\pi X_P}{\lambda f'_1}a\right)\sin c\left(\frac{\pi Y_P}{\lambda f'_1}a\right)}$.



1.b. L'éclairement vaut $\boxed{\varepsilon_a(X_P, Y_P) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{A}(P).\underline{A}^*(P)\right)}$, ce qui

conduit à $\boxed{\varepsilon_a(X_P, Y_P) = \frac{1}{2}a^4 K_1^2 \sin c^2\left(\frac{\pi X_P}{\lambda f'_1}a\right)\sin c^2\left(\frac{\pi Y_P}{\lambda f'_1}a\right)}$.

On a $\boxed{\varepsilon_{a\max} = \frac{1}{2}K_1^2 a^4}$ et $\boxed{g(X_P) = \sin c^2\left(\frac{\pi X_P}{\lambda f'_1}a\right)}$

1.c. Le centre de la figure de diffraction se situe en *O'*, image géométrique de E_a. La figure de diffraction est symétrique puisque la fonction $\text{sinc}^2(X)$ est une fonction paire. Elle s'annulera pour $\frac{\pi X_P}{\lambda f'_1}a = \pm\pi$, soit pour $\boxed{X_P = \pm\frac{\lambda f'_1}{a}}$ et on obtiendra une tache de largeur $\boxed{\frac{2\lambda f'_1}{a}}$.

1.d. Si le carré devient une fente très longue selon l'axe y, alors la fonction $\sin c^2\left(\frac{\pi Y_P}{\lambda f'_1}a_y\right)$ a une valeur quasi-nulle en toute direction, sauf pour $Y_P = 0$ où alors la valeur est maximale et vaut 1.

On observera une amplitude $\boxed{\underline{A}(P) = a_x a_y K_1 \sin c\left(\frac{\pi X_P}{\lambda f'_1}a\right)}$ et l'éclairement aura alors comme expression $\boxed{\varepsilon_a(X_P) = \frac{1}{2}a_x^2 a_y^2 K_1^2 \sin c^2\left(\frac{\pi X_P}{\lambda f'_1}a\right)}$ et sa forme sera la même que celle obtenue au **1.b.**

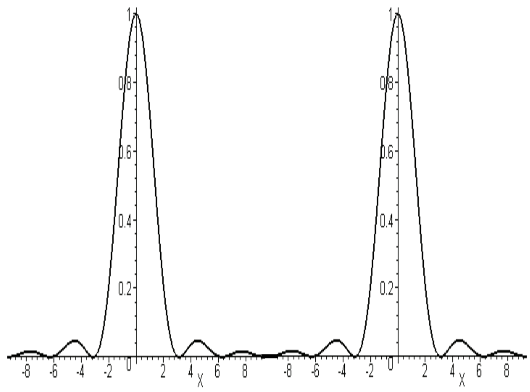
2.a. Pour E_b, on a $\alpha_i = \sin\theta$, $\beta_i = 0$ et $\gamma_i = \cos\theta$. Pour θ faible, $\alpha_i \approx \theta$ et $\gamma_i \approx 1$.

2.b. On obtient

$$\underline{A}_b(P) = K_1\int_{-a/2}^{+a/2}\int_{-b/2}^{+b/2}\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_i - \vec{u}).\ \overrightarrow{OM}\right)dS = K_1\int_{-a/2}^{+a/2}\int_{-b/2}^{+b/2}\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\left[(\theta-\alpha)X_P - \beta Y_P\right]\right)dS,$$ ce qui conduit à $\underline{A}_b(P) = a^2 K_1 \sin c\left(\frac{\pi a}{\lambda}(\alpha-\theta)X_P\right)\sin c\left(\frac{\pi a}{\lambda}\beta Y_P\right)$ et l'éclairement s'écrira :

$$\boxed{\varepsilon_b(X_P, Y_P) = \varepsilon_{b\max}\sin c^2\left(\frac{\pi}{\lambda}(\alpha-\theta)X_P\right)\sin c^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\beta Y_P\right)}$$

On obtient la même figure de diffraction que pour l'étoile E_a, mais elle est centrée sur le point tel que $Y_P = 0$ et $\alpha = \theta$, soit pour $X_P = f'_1.\theta$.



3.a. Les deux sources sont incohérentes : les éclairements s'ajoutent.

3.b. Le premier minimum apparaît en $\frac{\lambda f'_1}{a}$ (pour E_a) alors que le maximum pour E_b est en $f'_1.\theta$. On aura donc ces deux positions qui coïncident pour $\boxed{\theta_1 = \frac{\lambda}{a}}$. AN : $\theta_1 = 1{,}92.10^{-6}$ rad = 0,40 seconde d'arc.

3.c. La largeur de la tache centrale de diffraction sur l'écran de la caméra sera donc pour une étoile de $2f'_1\theta_1 \approx 29\ \mu$m, soit environ 3 pixels. C'est donc la dimension de l'ouverture, et la diffraction qui l'accompagne, qui limite le pouvoir séparateur.

III – Interférences

1.a. On se trouve dans la situation du **II-B-1.a.**, ce qui donne $\underline{A}'(P) = abK_1\sin c\left(\frac{\pi X_P}{\lambda f'_1}a\right)\sin c\left(\frac{\pi Y_P}{\lambda f'_1}b\right)$. Pour une fente fine, on aura $\boxed{\underline{A}'(P) = abK_1\sin c\left(\frac{\pi}{\lambda}\alpha b\right)}$.

1.b. Pour la fente (2), il faut ajouter le déphasage lié à C_1C_2, ce qui peut s'écrire :

$$\underline{A}'_2(X_P) = K_1\int_{-b/2}^{+b/2}\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_z-\vec{u}).\overrightarrow{C_1M}\right)dS = K_1\int_{-b/2}^{+b/2}\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_z-\vec{u})\left(\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2M}\right)\right)dS$$

$$= K_1\int_{-b/2}^{+b/2}\exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha\vec{u}_x+\beta\vec{u}_y)\left(\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2M}\right)\right)dS = K_1\int_{-b/2}^{+b/2}\exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha d)\right)\exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x\right)adx$$

$$\boxed{\underline{A}'_2(X_P) = K_1 ab\exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha d)\right)\sin c\left(\frac{\pi}{\lambda}\alpha b\right)}$$

1.c. Les deux figures de diffraction, prises séparément, sont les mêmes, à un coefficient constant pour d donné, avec les mêmes amplitudes pour l'éclairement puisque le coefficient a un module qui vaut 1.

2.a. Les deux sources provenant de la division du front d'onde sont cohérentes. On a alors les amplitudes complexes qui s'ajoutent : $\underline{A}(X_P) = \underline{A}'_1(X_P) + \underline{A}'_2(X_P)$

$\underline{A}(X_P) = K_1 ab\left(1+\exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha d)\right)\right)\sin c\left(\frac{\pi}{\lambda}\alpha b\right)$ et $\varepsilon_T(X_P) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{A}(X_P).\underline{A}^*(X_P)\right)$ s'écrit alors

$$\varepsilon_T(X_P) = \frac{1}{2}K_1^2a^2b^2\left(1+\exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha d)\right)\right)\left(1+\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha d)\right)\right)\sin c^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\alpha b\right)$$

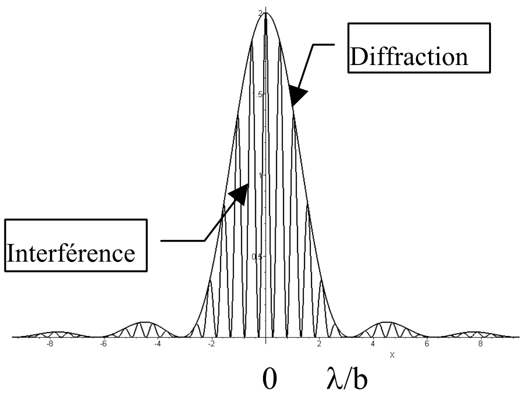
$$\varepsilon_T(X_P) = \frac{1}{2}K_1^2a^2b^2\left(2+\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha d)\right)+\exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha d)\right)\right)\sin c^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\alpha b\right)$$

$\boxed{\varepsilon_T(X_P) = K_1^2a^2b^2\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha d\right)\right)\sin c^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\alpha b\right)}$. On voit que cette expression se met sous la forme

$\varepsilon_T(X_P) = 2*\frac{1}{2}K_1^2a^2b^2\sin c^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\alpha b\right)\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha d\right)\right)$, soit

$\boxed{\varepsilon_T(X_P) = 2*\varepsilon(X_P)g_1(X_P)}$ où $\boxed{g_1(X_P) = 1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha d\right)}$ est une fonction caractéristique des interférences.

2.b. On voit bien que la figure de diffraction sert d'enveloppe à une figure d'interférence. Si les fentes sont infiniment fines, alors λ/b est très grand et l'on observe un nombre de franges d'interférences qui augmente : on observe essentiellement la figure d'interférence (la fonction sinc^2 tend vers 1 quand b tend vers 0).



L'interfrange vaut, en angle, $\boxed{i = \lambda/d}$.

3a. Lorsqu'il n'y a qu'une seule étoile E_a, la figure d'interférence est centrée en $X_{Pa} = 0$ (ordre 0). Le centre de la figure d'interférence pour l'étoile E_b correspond à la position de l'image géométrique de E_b : $X_{Pb} = f'_1\theta$ (ordre 0). <u>Les centres des figures d'interférence sont distants de $f'_1\theta$.</u> Un brouillage des franges sera obtenu lorsque le maximum d'une figure correspond au minimum de l'autre.

3.b. Cette condition se traduit par $f'_1\theta = ½.if'_1$, soit $\boxed{d = \frac{\lambda}{2\theta}}$. La valeur minimale de θ sera obtenu pour d le plus grand possible. Comme le dispositif est devant l'entrée de la lentille L_1, il faut $d \leq a$. On aura alors

$$\boxed{\theta_2 = \frac{\lambda}{2a} = 0{,}68.10^{-6}\text{ rad} = 0{,}14\text{ seconde d'arc}}$$

PARTIE B - ÉLECTROMAGNÉTISME

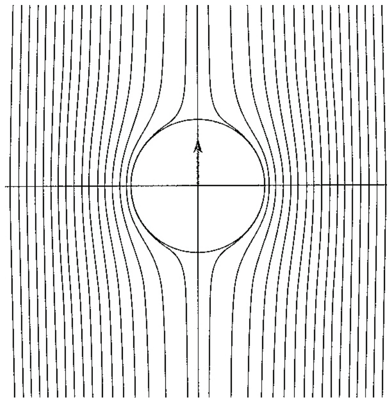
I – Préliminaires

I.1.Superposition d'un champ uniforme et de celui d'un dipôle

I.1.1 Le théorème de superposition conduit, après calculs, à $\boxed{\vec{B}_R = \vec{B}_a + \vec{B}_M = B_a\left(-\frac{3R^3}{2r^3}\cos\theta.\vec{e}_r + \left(1+\frac{R^3}{2r^3}\right)\vec{e}_z\right)}$

I.1.2. $\vec{B}_R.r\vec{e}_r = \vec{B}_a + \vec{B}_M = rB_a\left(-\frac{3R^3}{2r^3}\cos\theta + \left(1+\frac{R^3}{2r^3}\right)\vec{e}_z.\vec{e}_r\right)$. Comme $\vec{e}_z.\vec{e}_r = \cos\theta$, il vient immédiatement $\boxed{\vec{B}_R.r\vec{e}_r = rB_a\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta}$

I.1.3. Pour $r = R$, $\vec{B}_R.r\vec{e}_r = 0$. Le champ $\vec{B}_R$ est donc perpendiculaire à $\vec{e}_r$, soit <u>tangent à la sphère de rayon R</u>. Au niveau de la sphère, en coordonnées cartésiennes, $\vec{B}_R = \frac{3}{2}B_a\left(-\sin\theta.\cos\theta.\vec{e}_x + \sin^2\theta.\vec{e}_z\right)$. Le module de $\vec{B}_R$ vaut donc $\boxed{\left\|\vec{B}_R\right\| = \frac{3}{2}B_a\sin\theta}$: <u>il est maximal pour $\theta = \pi/2$.</u>



I.1.4. Loin de la sphère, le champ est uniforme et donc les lignes de champ sont des droites parallèles. Au niveau de la sphère, le champ est tangent à la sphère, ce qui conduit à des lignes de champ qui épousent la forme de la sphère. D'où l'allure des lignes de champ représentées ci-contre.

I.2.Moment magnétique d'une distribution sphérique de courant

I.2.1. La distribution est indépendante de φ, et comme la distribution de courant est selon le vecteur de base $\vec{e}_\varphi$, l'axe Oz est un axe d'antisymétrie pour la distribution de courant. En tout point de cet axe, le champ magnétique sera porté par cet axe et donc $\boxed{\vec{B}(O) = B(O).\vec{e}_z}$

I.2.2. La loi de Biot et Savart s'écrit $d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi R^2}\left(\vec{J}_s dS \wedge \vec{e}_{PO}\right)$ avec $\vec{e}_{PO} = -\vec{e}_r$ et $dS = R^2\sin\theta.d\theta.d\varphi$.

$$d\vec{B}(O) = -\frac{\mu_0}{4\pi R^2}\left(J_0\sin\theta.R^2\sin\theta.d\theta.d\varphi\right)\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r = -\frac{\mu_0}{4\pi R^2}\left(J_0\sin\theta.R^2\sin\theta.d\theta.d\varphi\right)\vec{e}_\theta$$

$d\vec{B}(O).\vec{e}_z = -\frac{\mu_0 J_0}{4\pi}\left(\sin^2\theta.d\theta.d\varphi\right)\vec{e}_\theta.\vec{e}_z = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi}\left(\sin^3\theta.d\theta.d\varphi\right)$. On aura ainsi $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\vec{e}_z$,

soit $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi}2\pi\frac{4}{3}\vec{e}_z$ et donc $\boxed{\vec{B}(O) = \frac{2}{3}\mu_0 J_0\vec{e}_z}$

I.2.3. Entre θ et $\theta + d\theta$, on peut définir un élément de courant dI tel que $dI.2\pi R\sin\theta = J_0\sin\theta.2\pi R\sin\theta.Rd\theta$, soit $dI = J_0R\sin\theta.d\theta$. Par définition, le moment dipolaire s'écrit $d\vec{M} = dI.S.\vec{e}_z$, soit :
$d\vec{M} = J_0R\sin\theta.d\theta.\pi(R\sin\theta)^2.\vec{e}_z$ et donc $\boxed{d\vec{M} = \pi J_0R^3\sin^3\theta.d\theta.\vec{e}_z}$

I.2.4. Le moment magnétique total s'écrit $\vec{M}_s = \pi J_0R^3\int_0^{\pi}\sin^3\theta.d\theta.\vec{e}_z$, soit $\boxed{\vec{M}_s = \frac{4}{3}\pi R^3 J_0.\vec{e}_z}$

II – Sphère supraconductrice dans un champ magnétique

II.1.Propriétés du courant et du champ. Conséquences

II.1.1. L'équation de Maxwell-Ampère est $\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0\vec{j}_v + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. En régime stationnaire, $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$. Le champ à l'intérieur est tel que $\vec{B} = \vec{0}$. On a donc $\boxed{\vec{j}_v = \vec{0}}$

II.1.2.a. La relation générale de passage pour $\vec{B}=\vec{0}$ est $\vec{B}_2-\vec{B}_1=\mu_0\vec{j}_s\wedge\vec{n}_{12}$, ce qui donne $(\vec{B}_2-\vec{B}_1)\vec{n}_{12}=(\mu_0\vec{j}_s\wedge\vec{n}_{12})\vec{n}_{12}=\vec{0}$, soit $\boxed{\vec{B}_{n2}-\vec{B}_{n1}=\vec{0}}$

II.1.2.b. Comme le champ magnétique est nul à l'intérieur de la sphère, la composante normale est nulle à l'intérieur et donc aussi à l'extérieur. Il ne reste que la composante tangentielle à l'extérieur : $\vec{B}_2$ est tangent à la sphère.

II.1.2.c. Pour le champ électrique, $\vec{E}_2-\vec{E}_1=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$ conduit à la continuité de la composante tangentielle. A l'intérieur d'un conducteur en équilibre, le champ électrique est nul et donc le champ extérieur aura une composante tangentielle nulle . Le champ électrique est normal à a surface.

II.1.3.a. $\vec{B}_2-\vec{B}_1=\mu_0\vec{j}_s\wedge\vec{n}_{12}$ et comme $\vec{B}_{n2}-\vec{B}_{n1}=\vec{0}$, il vient immédiatement $\boxed{\vec{B}_{t2}-\vec{B}_{t1}=\mu_0\vec{j}_s\wedge\vec{n}_{12}}$

II.1.3.b. La relation précédente permet d'obtenir $B_{2t}-B_{1t}=\mu_0 j_s$ et donc on a $\boxed{\vec{J}_s=\dfrac{1}{\mu_0}\vec{B}_2}$

II.1.3.c. Le théorème de Coulomb traduit la discontinuité du champ électrique à la traversée d'une surface, soit $\boxed{\vec{E}_2=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}}$

II.1.4. On a obtenu $\vec{B}_R=\vec{B}_a+\vec{B}_M=B_a\left(-\dfrac{3R^3}{2r^3}\cos\theta\vec{e}_r+\left(1+\dfrac{R^3}{2r^3}\right)\vec{e}_z\right)$.

Pour $r=R$, $\vec{B}_R(R)=B_a\left(-\dfrac{3}{2}\cos\theta\vec{e}_r+\dfrac{3}{2}\vec{e}_z\right)=\dfrac{3}{2}B_a\left(-\cos\theta\vec{e}_r+\cos\theta\vec{e}_r-\sin\theta\vec{e}_\theta\right)=-\dfrac{3}{2}B_a\sin\theta\vec{e}_\theta$. On obtient donc $\vec{B}_2=-\dfrac{3}{2}B_a\sin\theta\vec{e}_\theta=\mu_0\vec{J}_s\wedge\vec{e}_r$.

Comme $\vec{e}_r\wedge(\vec{J}_s\wedge\vec{e}_r)=\vec{J}_s-(\vec{e}_r.\vec{J}_s)\vec{e}_r=\vec{J}_s$, $-\dfrac{3}{2}B_a\sin\theta(\vec{e}_r\wedge\vec{e}_\theta)=\mu_0\vec{e}_r\wedge(\vec{J}_s\wedge\vec{e}_r)=\mu_0\vec{J}_s=-\dfrac{3}{2}B_a\sin\theta\vec{e}_\varphi$, ce qui donne $\boxed{\vec{J}_s=-\dfrac{3B_a\sin\theta}{2\mu_0}\vec{e}_\varphi}$

II.1.5. On obtient $\boxed{\vec{B}(O)=\dfrac{2}{3}\mu_0J_0\vec{e}_z=\vec{B}_{\text{int}}=\dfrac{2}{3}\mu_0\left(-\dfrac{3B_a}{2\mu_0}\right)\vec{e}_z=-B_a\vec{e}_z}$: le champ total est bien nul à l'intérieur de la sphère.

II.1.6. $J_s(R,\pi/2)=1{,}2.10^6\ \text{A.m}^{-1}$.

II.1.7. $\vec{M}_s=\dfrac{4}{3}\pi R^3J_0.\vec{e}_z=-\dfrac{4}{3}\pi R^3\dfrac{3B_a}{2\mu_0}\vec{e}_z$ d'où $\boxed{\vec{M}_s=-\dfrac{2\pi R^3}{\mu_0}B_a\vec{e}_z}$. $\boxed{\left\|\vec{M}_s\right\|=\dfrac{2\pi10^{-6}}{4\pi10^{-7}}=5{,}0\ \text{Am}^2}$

II.2.Rupture de supraconductivité. État intermédiaire.

II.2.1. $\left\|\vec{B}_R(R)\right\|=\dfrac{3}{2}B_a\sin\theta$ est maximal pour $\theta=\pi/2$: la supraconductivité cesse en premier au niveau du cercle équatorial.

II.2.2. $\vec{J}_s=-\dfrac{3B_a\sin\theta}{2\mu_0}\vec{e}_\varphi$ vaut, pour $\theta=\pi/2$, $\vec{J}_s=-\dfrac{3B_a}{2\mu_0}\vec{e}_\varphi$ de module $\boxed{J_c=\dfrac{B_c}{\mu_0}=9{,}94.10^6\ \text{A.m}^{-2}}$

II.2.3. $\vec{B}_R(R)=-\dfrac{3}{2}B_a\sin\theta\vec{e}_\theta$. Pour $\theta=\pi/2$, $\vec{B}_R(R)=-\dfrac{3}{2}B_a\vec{e}_\theta$ et donc on veut $B_{\max}=3/2.B_1$. On applique un champ maximal $B_1=2/3.B_c=8{,}33$ T.

II.2.4. et II.2.5. Cette question et la suivante semblent difficiles à résoudre sans information complémentaire. On pourra trouver celles-ci sur le site http://www.lpm.u-nancy.fr/webperso/mangin.p/ch-3-champ-cri.pdf, ce qui conduit aux conclusions suivantes :

$B_a<2/3\ B_c$: la sphère est totalement supraconductrice.

$2/3\ B_c<B_a<B_c$: la sphère est partiellement supraconductrice.

$B_c<B_a$: la sphère est totalement à l'état normal.

II.3.Lévitation magnétique.

II.3.1. Pour une couronne située entre θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$, elle se comporte comme une spire parcourue par un courant dI tel que $2\pi R\sin\theta.\mathrm{d}I = J_s 2\pi R^2 \sin\theta.\mathrm{d}\theta$, soit $\mathrm{d}I = J_s R\mathrm{d}\theta$. La force élémentaire de Laplace s'écrit $d^2\vec{F} = dI.\overrightarrow{dOM} \wedge \vec{B}_a$ et donc sur la couronne $d\vec{F} = dI \oint_{couronne} \overrightarrow{dOM} \wedge \vec{B}_a$. Comme $\oint_{Couronne} \overrightarrow{dOM} = \vec{0}$, il est clair que la force qui agit sur une couronne est nulle et donc la force qui agit sur la sphère placée dans un champ magnétique uniforme est nulle.

II.3.2. $d\varepsilon_{pm} = -d\vec{M}_s.\vec{B}_a = -(-Kd\vec{B}_a).\vec{B}_a$ d'où $\boxed{\varepsilon_{pm} = \frac{1}{2}K\vec{B}_a^{\,2} + cste}$

II.3.3. L'équilibre est stable lorsque l'énergie potentielle est minimale : la sphère se déplacera dans la zone de champ de module faible.