Corrigé DM12 : extrait CCP MP 2008.

PCSI

26 janvier 2009

1 Focométrie.

1.1 Lentille convergente (L_1).

1.1.1 Méthode d'autocollimation.

1. Pour mesurer la distance focale objet $f_1 = -f_1'$ de la lentille (L_1) avec la méthode d'autocollimation on appose derrière la lentille un miroir plan ; on éclaire un objet réel AB et on déplace l'ensemble lentille-miroir jusqu'à voir l'image A'B' nette de l'objet dans le même plan que l'objet.

   On constate alors que l'image est de même taille que l'objet et renversée, soit $\gamma = -1$.

   On peut alors montrer que l'objet AB est situé dans le plan focal objet de la lentille.

   On mesure ensuite la distance objet-lentille qui représente f_1'.

2. $$\boxed{f_1' = 20,2cm} \tag{1}$$

   et

   $$\boxed{\Delta f_1' = 0,5cm} \tag{2}$$

1.1.2 Formule de conjugaison de Descartes.

1. On applique la formule de conjugaison de Descartes, appelée aussi formule de conjugaison avec origine au sommet O_1 :

   $$\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'} \tag{3}$$

   Or, l'objet est réel donc $\overline{O_1A} < 0$. On a : $\overline{O_1A} = -35cm < \overline{O_1F_1}$

   On constate que l'objet est situé avant le foyer objet F_1 de (L_1).

   Par conséquent, l'image A' est nécessairement réelle, soit $\overline{O_1A'} > 0$. On peut le justifier par une construction ou avec la formule de conjugaison :

$$\overline{O_1A} < -f'_1 \tag{4}$$
$$\frac{1}{\overline{O_1A}} > -\frac{1}{f'_1} \tag{5}$$
$$\frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{f'_1} > 0 \tag{6}$$
$$\text{Or, } \frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{f'_1} = \frac{1}{\overline{O_1A'}} \tag{7}$$
$$\text{D'où : } \frac{1}{\overline{O_1A'}} > 0 \tag{8}$$
$$\text{Soit : } \overline{O_1A'} > 0 \tag{9}$$

On a donc : $\overline{O_1A'} = +46,5cm$.
Ensuite, il reste à appliquer la formule de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{f'_1} = \frac{1}{46,5} - \frac{1}{-35} \tag{10}$$
$$f'_1 = \frac{46,5 \times 35}{46,5 + 35} \tag{11}$$

Finalement :

$$\boxed{f'_1 = 20,0cm} \tag{12}$$

2. Pour calculer $\Delta f'_1$, on différentie la formule de Descartes :

$$-\frac{d(\overline{O_1A'})}{(\overline{O_1A'})^2} + \frac{d(\overline{O_1A})}{(\overline{O_1A})^2} = -\frac{df'_1}{f'^2_1} \tag{13}$$

On introduit les erreurs absolues en majorant :

$$\frac{\Delta(\overline{O_1A'})}{(\overline{O_1A'})^2} + \frac{\Delta(\overline{O_1A})}{(\overline{O_1A})^2} = \frac{\Delta f'_1}{f'^2_1} \tag{14}$$

Finalement :

$$\boxed{\Delta f'_1 = f'^2_1[\frac{\Delta(\overline{O_1A'})}{(\overline{O_1A'})^2} + \frac{\Delta(\overline{O_1A})}{(\overline{O_1A})^2}]} \tag{15}$$

Application numérique :
On reprend la valeur exacte de f'_1, gardée en mémoire dans la calculatrice et on calcule :

$$\Delta f'_1 = f'^2_1[\frac{0,8}{(46,5)^2} + \frac{0,4}{(-35)^2}] \tag{16}$$

Finalement :

$$\boxed{\Delta f'_1 = 0,3cm} \tag{17}$$

1.1.3 La méthode de Bessel.

1. On pose $\overline{O_1A} = p$ et $\overline{AA'} = D$
   On en déduit :

$$\overline{O_1A'} = \overline{O_1A} + \overline{AA'} \tag{18}$$

$$\text{Soit : } \overline{O_1A'} = p + D \tag{19}$$

   On applique maintenant la formule de Descartes :

$$\frac{1}{p+D} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f_1'} \tag{20}$$

$$p(p+D) = f_1'(p - p - D) \tag{21}$$

$$p^2 + Dp + Df_1' = 0 \tag{22}$$

   On résout cette équation du 2nd degré en p. Pour cela, on écrit le discriminant :

$$\Delta = D^2 - 4Df_1' = D(D - 4f_1') \tag{23}$$

   Il y a deux positions p_1 et p_2 si $\Delta > 0$, soit :

$$D > 4f_1' \tag{24}$$

   Finalement :

$$\boxed{D_{min} = 4f_1'} \tag{25}$$

   Dans ces conditions, les deux positions sont :

$$\boxed{p_1 = \frac{-D + \sqrt{D^2 - 4Df_1'}}{2}} \tag{26}$$

   Et :

$$\boxed{p_2 = \frac{-D - \sqrt{D^2 - 4Df_1'}}{2}} \tag{27}$$

   On a : $\Delta < D^2$ soit $\sqrt{\Delta} < D$.
   On en déduit que $p_1 < 0$ et $p_2 < 0$: les deux positions calculées correspondent bien à un objet réel.
   De plus, on a bien : $|p_2| > |p_1|$.
2. On a :

$$d = p_1 - p_2 \tag{28}$$

$$d = \sqrt{\Delta} \tag{29}$$

$$d^2 = \Delta \tag{30}$$

$$d^2 = D^2 - 4Df_1' \tag{31}$$

Finalement, on trouve la formule de Bessel :

$$\boxed{f_1' = \frac{D^2 - d^2}{4D}} \tag{32}$$

3. On différentie la formule de Bessel, en prenant d'abord le logarithme népérien.
   Puis, on regroupe tout ce qui dépend de dD et on fait de mêm pour les termes en $d(d)$.
   Ensuite, on majore pour faire apparaître les erreurs absolues ΔD et Δd.

$$\ln f_1' = \ln(D^2 - d^2) - \ln(4D) \tag{33}$$

$$\frac{df_1'}{f_1'} = \frac{2DdD - 2d.d(d)}{D^2 - d^2} - \frac{dD}{D} \tag{34}$$

$$\frac{df_1'}{f_1'} = (\frac{2D}{D^2 - d^2} - \frac{1}{D})dD - \frac{2d.d(d)}{D^2 - d^2} \tag{35}$$

$$\frac{\Delta f_1'}{f_1'} = (\frac{D^2 + d^2}{D(D^2 - d^2)}\Delta D + \frac{2d.\Delta d}{D^2 - d^2} \tag{36}$$

$$\Delta f_1' = \frac{(D^2 - d^2)}{4D}[\frac{D^2 + d^2}{D(D^2 - d^2)}\Delta D + \frac{2d.\Delta d}{D^2 - d^2}] \tag{37}$$

Finalement :

$$\boxed{\Delta f_1' = [1 + (\frac{d}{D})^2]\frac{\Delta D}{4} + \frac{d}{2D}\Delta d} \tag{38}$$

Application numérique :

$$\Delta f_1' = [1 + (\frac{30}{90})^2]\frac{1}{4} + \frac{30}{2 \times 90} \times 1 \tag{39}$$

Soit :

$$\boxed{\Delta f_1' = 0,4cm} \tag{40}$$

1.1.4 La méthode de Silbermann.

1. Le grandissement est défini par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \tag{41}$$

Or, pour une lentille mince sphérique dans l'approximation de Gauss :

$$\gamma = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A}} \tag{42}$$

Or, $\gamma = -1$, d'où :

$$\overline{O_1A'} = -\overline{O_1A} = \overline{AO_1} = \frac{D_0}{2} \tag{43}$$

$$\text{Or, } \frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1} \tag{44}$$

$$\text{D'où : } -\frac{2}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1} \tag{45}$$

$$\text{Soit : } \overline{AO_1} = 2f'_1 \tag{46}$$

$$\frac{D_0}{2} = 2f'_1 \tag{47}$$

Finalement :

$$\boxed{f'_1 = \frac{D_0}{4}} \tag{48}$$

Application numérique :

$$f'_1 = \frac{80,4}{4} \tag{49}$$

Soit :

$$\boxed{f'_1 = 20,1cm} \tag{50}$$

2. Du résultat précédent, on déduit :

$$\frac{\Delta f'_1}{f'_1} = \frac{\Delta D_0}{D_0} \tag{51}$$

$$\Delta f'_1 = \frac{D_0}{4}\frac{\Delta D_0}{D_0} \tag{52}$$

Finalement :

$$\boxed{\Delta f'_1 = \frac{\Delta D_0}{4}} \tag{53}$$

Application numérique :

$$\Delta f'_1 = \frac{0,5}{4} \tag{54}$$

En écrivant $\Delta f'_1$ à $0,1cm$ près, on a :

$$\boxed{\Delta f'_1 = 0,1cm} \tag{55}$$

3. La méthode de Silberamann peut se déduire de la méthode de Bessel en considérant le cas où $\Delta = 0$.
En effet, il y a alors dans ce cas qu'une seule position de la lentille qui donne une image nette sur l'écran.
En reprenant les expressions des positions p_1 et p_2, on obtient :
$p_1 = p_2 = -\frac{D_{min}}{2}$, avec $D_0 = D_{min} = 4f'$.

D'où :

$$\boxed{f_1' = \frac{D_0}{4}} \tag{56}$$

1.1.5 Comparaison des méthodes.

La méthode la plus rapide pour déterminer l'ordre de grandeur de la distance focale f_1' est la méthode d'autocollimation.

Cependant, la méthode de Silbermann est la méthode la plus précise car c'est celle qui a donné la valeur de $\Delta f_1'$ la plus faible.

1.2 Lentille divergente (L_2).

1. Notons A_1 l'image intermédiaire de l'objet A.
   L'association de (L_0) avec (L_2) conjugue les points suivants : $A \rightarrow A_1 \rightarrow A'$.
   On applique la formule de Descartes deux fois :

$$\frac{1}{\overline{O_2A_1}} - \frac{1}{\overline{O_2A}} = \frac{1}{f_0'} = V_0 \tag{57}$$

$$\text{Et, } \frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'} = V_2 \tag{58}$$

$$(57)+(58) \text{ donne : } \frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A}} = V_0 + V_2 \tag{59}$$

   Finalement :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A}} = V = V_0 + V_2 \tag{60}$$

   La relation (60) est la formule de conjugaison d'une lentille de vergence $V = V_0 + V_2$ qui conjugue A et A'.

$$\boxed{V = V_0 + V_2} \tag{61}$$

2. Le grandissement $\gamma = -1$. Or, $\gamma = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A}}$. D'où : $\overline{O_2A'} = \overline{AO_2}$.
   On en déduit : $D = \overline{AA'} = \overline{AO_2} + \overline{O_2A'} = 2\overline{O_2A'}$
   Soit : $\overline{O_2A'} = -\overline{O_2A} = \frac{D}{2}$.
   De la formule de Descartes (60), on déduit :

$$\frac{2}{\overline{O_2A'}} = V \tag{62}$$

$$\frac{4}{D} = V \tag{63}$$

   Application numérique : $D = 1m$

$$\boxed{V = 4\delta} \tag{64}$$

3. On en déduit la vergence V_2 de : $V_2 = V - V_0$
Application numérique : $V = 4\delta$ et $V_0 = 8\delta$

$$\boxed{V_2 = -4\delta} \tag{65}$$

La distance focale image f_2' est définie par : $f_2' = \frac{1}{V_2}$
Application numérique :

$$\boxed{f_2' = -25,0cm} \tag{66}$$

4. On calcule V_2 avec :

$$V = V_0 + V_2 - eV_0V_2 \tag{67}$$

Soit :

$$\boxed{V_2 = \frac{V - V_0}{1 - eV_0}} \tag{68}$$

Application numérique : il faut penser à convertir e en m car $\delta = m^{-1}$.

$$V_2 = \frac{4-8}{1 - 0,5.10^{-2}8} \tag{69}$$

Soit :

$$\boxed{V_2 = -4,2\delta} \tag{70}$$

On en déduit $f_2' = \frac{1}{V_2}$

$$\boxed{f_2' = -24,0cm} \tag{71}$$

1.2.1 Le viseur à frontale fixe.

1. Notons V_1 la position du viseur qui pointe l'objet AB et V_2 celle qui pointe l'image $A'B'$. Soit d la frontale du viseur. La frontale d étant fixe, on a les égalités suivantes :

$$d = \overline{AV_1} = \overline{A'V_2} \tag{72}$$
$$\overline{AV_1} = \overline{A'A} + \overline{AV_1} + \overline{V_1V_2} \tag{73}$$
$$\text{D'où : } \overline{AA'} = \overline{V_1V_2} = D \tag{74}$$

On applique la formule de Descartes à (L_2) :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A}} = \frac{1}{f_2'} \tag{75}$$
$$\text{Avec : } \overline{O_2A'} = \overline{O_2A} + \overline{AA'} \tag{76}$$
$$\text{Soit : } \overline{O_2A'} = -\overline{AO_2} + D \tag{77}$$
$$\text{Or, } \overline{AO_2} = x \tag{78}$$
$$\text{D'où : } \overline{O_2A'} = D - x \tag{79}$$
$$\text{D'après (75) : } \frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f_2'} \tag{80}$$
$$\text{Soit : } \frac{D}{x(D-x)} = \frac{1}{f_2'} \tag{81}$$

Finalement :

$$\boxed{f'_2 = x(1 - \frac{x}{D})} \quad (82)$$

2. *Application numérique* :

$$f'_2 = 30(1 - \frac{30}{16,5}) \quad (83)$$

Soit :

$$\boxed{f'_2 = -24,5cm} \quad (84)$$

1.2.2 La méthode de Badal.

1. On considère le système optique composé par l'association successives des lentilles (L), (L_2) et (L_0).
   Ce système conjugue les points suivants : $F \rightarrow A_\infty \rightarrow F'_2 \rightarrow A'$.
   La formule de Newton (ou formule de conjugaison avec origine aux foyers) s'écrit dans le cas général où $A \rightarrow A'$:

$$\overline{FA} \times \overline{F'A'} = -f'^2 \quad (85)$$

   On considère la lentille (L_0) qui conjugue $F'_2 \rightarrow A'$.
   La formule de Newton s'écrit alors :

$$\overline{F_0F'_2} \times \overline{F'_0A'} = -f_0'^2 \quad (86)$$
$$\text{Or, } \overline{F'_0A'} = D \quad (87)$$
$$\text{Et : } F_0 = O_2 \quad (88)$$
$$\text{D'où : } \overline{O_2F'_2} \times D = -f_0'^2 \quad (89)$$
$$\text{Or, par définition : } \overline{O_2F'_2} = f'_2 \quad (90)$$

   Finalement :

$$\boxed{f'_2 = -\frac{f_0'^2}{D}} \quad (91)$$

2. *Application numérique* :

$$f'_2 = -\frac{(12,5)^2}{6,5} \quad (92)$$

Soit :

$$\boxed{f'_2 = -24,0cm} \quad (93)$$