CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE
FILIERE MP
Corrigé
Par Mohamed ELABDALLAOUI
Professeur agrégé de physique chimie CPGE Ibno Tymia MARRAKECH

– MÉCANIQUE –

Partie 1 – Oscillations dans le champ de pesanteur terrestre

1.1. $I_O = I_G + m\ell^2 = \frac{mL^2}{3} + m\ell^2 = \frac{3}{2}m\ell^2 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{\ell}{L} = \sqrt{\frac{2}{3}}}$.

1.2. $\boxed{Ec = \frac{1}{2}.I_O.\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}m\ell^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$ $\qquad Ep = -m\vec{g}.\overrightarrow{OG} + Cste$ $\boxed{Ep = mg\ell(1-\cos\theta)}$

1.3. La Liaison en O est parfaite et le poids est une force conservative donc l'énergie est constante au cours du mouvement. $Em = \frac{3}{4}m\ell^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$ d'où $\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2g}{3\ell}\sin\theta = 0}$

1.4. on a $\sin\theta \approx \theta \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2g}{3\ell}\theta = 0}$ et $\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos[\omega_1 t]}$ $\boxed{\omega_1 = \sqrt{3}rad.s^{-1}}$

Partie 2 – Oscillateur harmonique.

2.1. $\boxed{Ep = \frac{1}{2}K.X^2}$

2.2 $\boxed{Et = \frac{1}{2}M.\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}K.X^2}$ $\qquad \boxed{\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{K}{M}.X = 0}$

2.3. $\boxed{X(t) = X_0\cos\left[\sqrt{\frac{K}{M}}.t\right]}$

Partie 3 – Oscillations couplées.

3.1. L'accélération de O est $\boxed{\vec{\Gamma}_O = \ddot{x}.\vec{e}_x = \ddot{X}.\vec{e}_x}$

on a $\overrightarrow{OG} = \ell.\vec{e}_r$ puis $\boxed{\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r}$

$\boxed{\vec{\Gamma}_G = \vec{\Gamma}_O + \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = \ddot{X}.\vec{e}_x + \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r}$ (loi de la composition des accélérations)

on a

$\vec{e}_r = \sin\theta\vec{e}_x - \cos\theta\vec{e}_y$

$\vec{e}_\theta = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y$ $\qquad$ donc

$$\boxed{\vec{\Gamma}_G = \left[\ddot{X} + \ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta\right]\vec{e}_x + \left[\ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta\right]\vec{e}_y}$$

3.2.

Le Théorème de la résultante cinétique appliqué à la tige s'écrit : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = m\vec{\Gamma}_G$

$$\boxed{\begin{cases} T = m\left[\ddot{X} + \ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta\right] \\ N = mg + m\left[\ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta\right] \end{cases}}$$

3.3.

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_G} = I_G.\dot{\theta}.\vec{e}_z}$$

3.4.

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_G}}{dt} = \overrightarrow{GO} \wedge \left(T\,\vec{e}_x + N\,\vec{e}_y\right) + \underbrace{\vec{M}_G\left(\vec{P}\right)}_{0} \quad \Rightarrow \boxed{I_G.\ddot{\theta} = -\ell.N.\sin\theta - \ell.T.\cos\theta}$$

3.5.

$$\boxed{I_G.\ddot{\theta} = -m\ell.\left[g + \left(\ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\right].\sin\theta - m\ell\left[\ddot{X} + \ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta\right].\cos\theta}$$

3.6.

$\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx \theta$

$$I_G.\ddot{\theta} = -m\ell.\left[g + \left(\cancel{\ell\ddot{\theta}.\theta + \ell\dot{\theta}^2}\right)\right].\theta - m\ell\left[\ddot{X} + \ell\ddot{\theta} - \cancel{\ell\dot{\theta}^2.\theta}\right]$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{\left(I_G + m\ell^2\right)}\theta = -\frac{m\ell}{\left(I_G + m\ell^2\right)}\ddot{X} \quad \text{Donc} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2g}{3\ell}\theta = -\frac{2}{3}\frac{d^2\left(X/\ell\right)}{dt^2}} \quad [\mathrm{I}] \quad \boxed{\alpha = \frac{m\ell^2}{\left(I_G + m\ell^2\right)} = \frac{2}{3}}$$

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{3}\,rad.s^{-1}}$$

3.7.

Le Théorème de la résultante cinétique appliqué à la plateforme s’écrit : $\underbrace{-\vec{R}}_{la\,tige:\,principe\,d'action\,et\,de\,la\,réaction} + M\vec{g} + \underbrace{\vec{R}'}_{réaction\,des\,rails} \underbrace{-K.X.\vec{e}_x}_{ressort} = M\vec{\Gamma}_O$

Par projection sur l’axe des x

$$M\ddot{X} = -T - KX \quad \Rightarrow M\ddot{X} = -m\left[\ddot{X} + \ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta\right] - KX$$

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{K}{(M+m)}X = -\frac{m}{(M+m)}\left[\ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta\right]}$$

3.8.

Petits mouvements $\ddot{X} + \dfrac{K}{(M+m)}X = -\dfrac{m}{(M+m)}\left[\ell\ddot{\theta} - \cancel{\ell\dot{\theta}^2\theta}\right]$

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{X}{\ell}\right) + \frac{K}{(M+m)}\frac{X}{\ell} = -\frac{m}{(M+m)}\frac{d^2\theta}{dt^2}} \quad [\mathrm{II}] \quad \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{(M+m)}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = \frac{m}{(M+m)}}$$

3.9.

$$\boxed{\omega_2^2 = 4\,rad.s^{-1}} \quad \boxed{\alpha\beta = \frac{1}{2}}$$

3.10.

On remplace $\theta = A\cos\Omega t$ et $\dfrac{X}{\ell} = B\cos\Omega t$ dans $[\mathrm{I}]$ et $[\mathrm{II}]$

On trouve $\boxed{\alpha\beta.\Omega^4 = \left(\omega_1^2 - \Omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \Omega^2\right)}$

Et on vérifie sans problème pour $\Omega = \sqrt{2}\,rad.s^{-1} \Rightarrow \dfrac{1}{2}4 = (3-2)(4-2)$

Pour $\Omega = 2\sqrt{3}\,rad.s^{-1} \Rightarrow \dfrac{1}{2}144 = (3-12)(4-12)$.

3.11.

On écrit $\theta = A_1\cos\left[\sqrt{2}.t\right] + A_2\cos\left[2\sqrt{3}.t\right]$ et $\dfrac{X}{\ell} = B_1\cos\left[\sqrt{2}.t\right] + B_2\cos\left[2\sqrt{3}.t\right]$

On trouve $\theta = \dfrac{3}{5}\theta_0\cos\left[\sqrt{2}.t\right] + \dfrac{2}{5}\theta_0\cos\left[2\sqrt{3}.t\right]$ et $\dfrac{X}{\ell} = \dfrac{9}{20}\theta_0\left(\cos\left[\sqrt{2}.t\right] - \cos\left[2\sqrt{3}.t\right]\right)$