



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PC

## PHYSIQUE 1

DURÉE: 4 heures

*Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

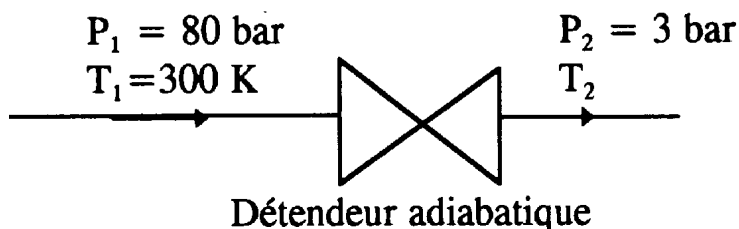
*Les parties I et II sont totalement indépendantes.*

## PARTIE 1: THERMODYNAMIQUE

*Le gaz naturel est transporté à haute pression dans un gazoduc avant d'être détendu, la plupart du temps en plusieurs étapes, dans la région d'utilisation. C'est à l'une de ces détentes que cette étude est consacrée.*

Nous supposons le gaz constitué uniquement de méthane ( $M=16 \text{ g.mol}^{-1}$ ) et les effets de la pesanteur seront négligés. Son débit massique  $D$  est de  $2,5 \text{ kg/s}$ .

La pression en amont du détendeur est  $P_1 = 80 \text{ bar}$  et sa température  $T_1 = 300 \text{ K}$ . La pression en aval est  $P_2=3\text{bar}$ . Les canalisations amont et aval ont même rayon  $r=25 \text{ cm}$ .



## 1. Nombre de foyers alimentés par le gazoduc.

On peut lire dans une brochure de Gaz De France (GDF): « Le gaz naturel est puissant. Son pouvoir calorifique est de  $10 \text{ th/m}^3$ . La thermie (th) est la quantité de chaleur nécessaire pour élever de  $1^\circ\text{C}$  la température de  $1000 \text{ L}$  d'eau». La capacité thermique massique de l'eau sera prise égale à  $4,18 \text{ kJ}\cdot^\circ\text{C}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

En admettant que ces données font référence au gaz dans les conditions de température (avant combustion) et de pression d'utilisation domestique ( $20^\circ\text{C}$  soit  $293 \text{ K}$  et  $1 \text{ bar}$  soit  $10^5 \text{ Pa}$ ) et que le méthane obéit dans ce cas à l'équation d'état du gaz parfait ( $R=8,314 \text{ J.mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ), déterminer en  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  le pouvoir calorifique massique du gaz naturel.

Calculer le nombre de foyers alimentés par le gazoduc pour une consommation moyenne de  $3 \text{ kW}$  par foyer.

## 2. Etude de la détente.

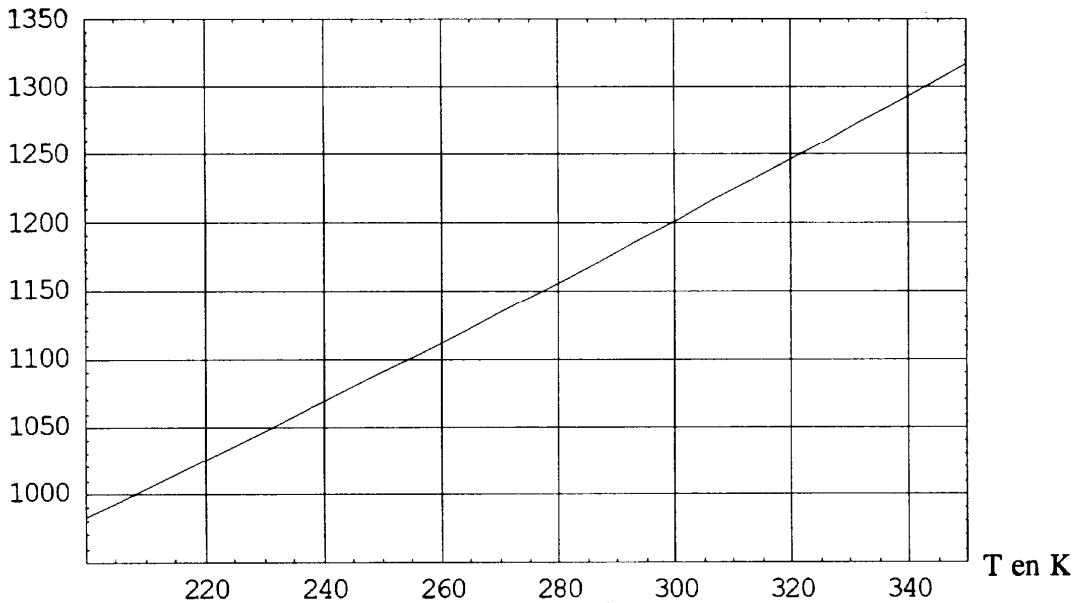
**Le détendeur fonctionne en régime permanent. Il est adiabatique et l'extérieur ne lui apporte aucune puissance mécanique.**

On utilisera dans la suite les données thermodynamiques ci-dessous pour le méthane dans lesquelles  $h$ ,  $s$  et  $v$  désignent l'enthalpie massique, l'entropie massique et le volume massique.

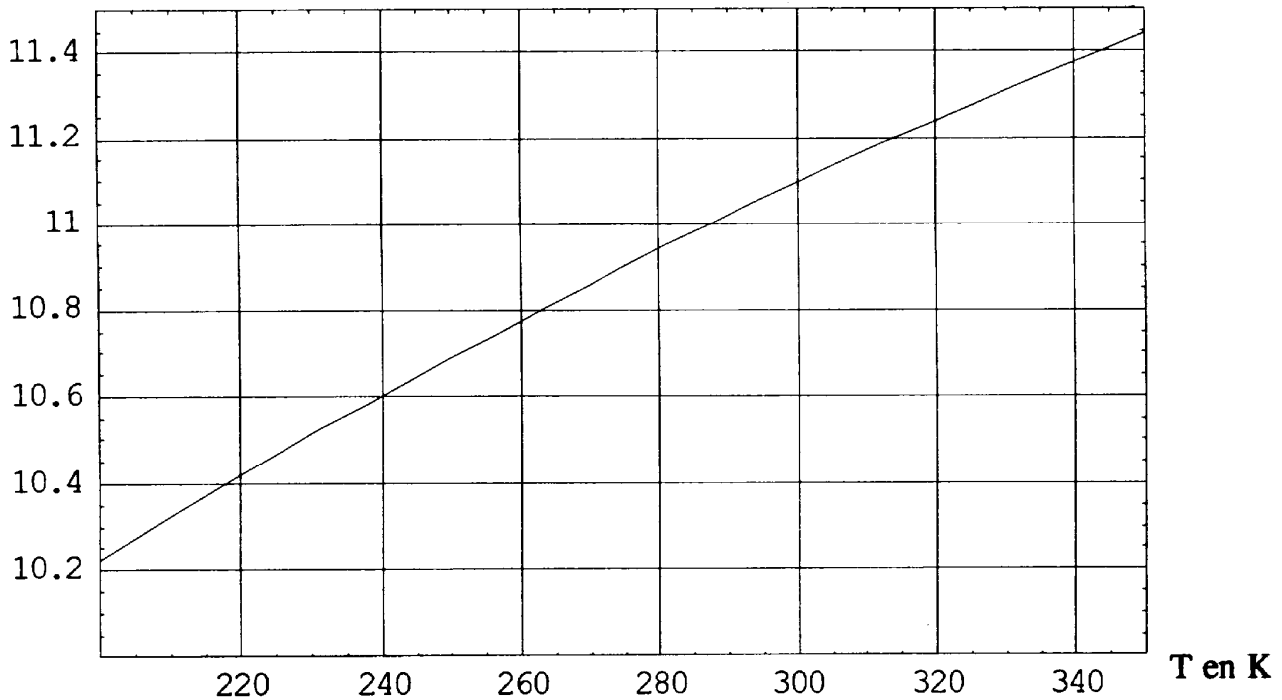
Sous 80 bar et à 300 K :  $h = 1120 \text{ kJ.kg}^{-1}$  ;  $s=9,10 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ;  $v=0,0170 \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$  pour le méthane gazeux.

Sous 3 bar, la température d'équilibre liquide vapeur est de 128 K. Dans ces conditions, pour le liquide saturant  $h_L=342\text{kJ.kg}^{-1}$  et pour la vapeur saturante  $h_v=820 \text{ kJ.kg}^{-1}$  et  $s_v=9,13 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

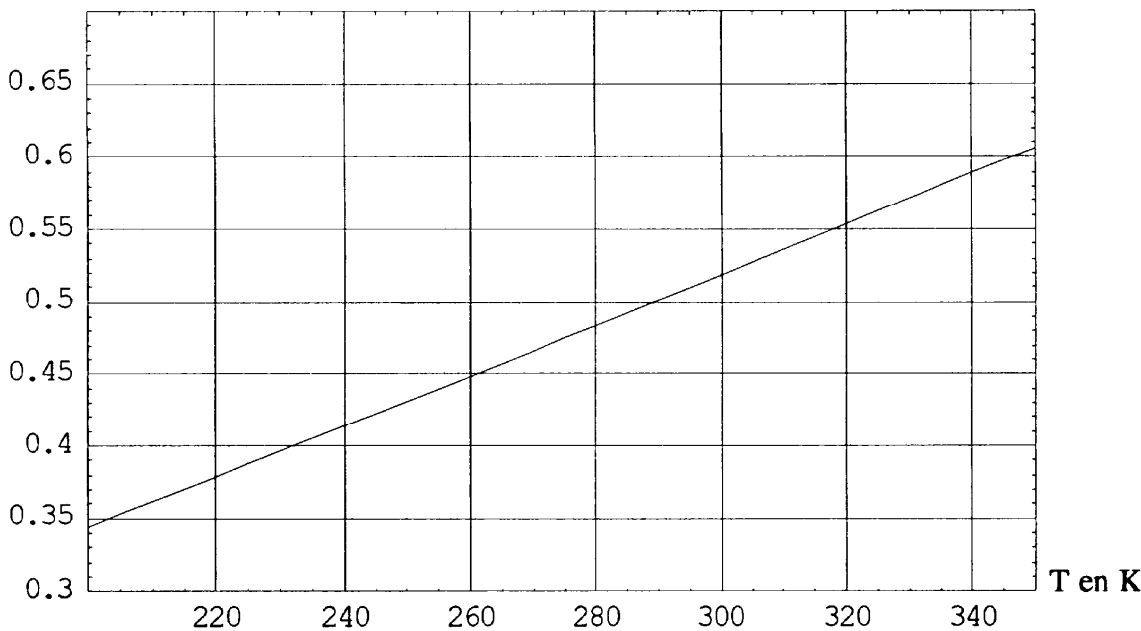
i. Enthalpie massique du méthane sous 3 bar en  $\text{kJ.kg}^{-1}$  en fonction de la température en K.



ii. Entropie massique du méthane sous 3 bar en  $\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  en fonction de la température en K.



iii. Volume massique du méthane sous 3 bar en  $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  en fonction de la température en K.



2. 1. Température du méthane à la sortie du détendeur.

Quel nom propre composé associe-t-on à cette détente ? Quel intérêt présente-t-elle pour l'étude des fluides ? Montrer que les enthalpies massiques amont ( $h_1$ ) et aval ( $h_2$ ) du méthane sont égales si l'on ne prend pas en compte son énergie cinétique.

Déterminer la température  $T_2$  (en K) du méthane à la sortie du détendeur.

2.2. Vitesses du gaz en amont et en aval du détendeur.

Déterminer les modules  $c_1$  et  $c_2$  des vitesses supposées uniformes du gaz dans la canalisation en amont et en aval du détendeur. L'hypothèse concernant l'énergie cinétique est-elle vérifiée ?

2.3. Réchauffement du gaz en aval du détendeur.

a. Capacité thermique du méthane

Sous 3 bar et entre 260 K et 300 K, on suppose que l'enthalpie massique  $h$  du gaz a pour différentielle  $dh = c_p dT$  où  $c_p$  est une constante. Calculer  $c_p$ .

b. Etude du transfert thermique avec l'atmosphère.

La paroi de la canalisation est faite en acier de conductivité thermique  $K = 30 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$  et d'épaisseur  $e = 3 \text{ mm}$ . La canalisation est plongée dans l'atmosphère à la température  $T_1 = 300 \text{ K}$ . On supposera que la température du gaz  $T(x)$ , la température  $T_i(x)$  de la face interne de la paroi et la température  $T_e(x)$  de sa face externe ne dépendent que de l'abscisse  $x$  le long de l'axe de la canalisation, l'origine étant prise à la sortie du détendeur.

A l'interface gaz/acier le flux thermique  $d\Phi_{\text{Th}}$  à travers la surface d'aire  $dS$  orientée vers l'intérieur obéit à la loi des transferts thermiques conducto-convectifs :  $d\Phi_{\text{Th}} = h_i [T_i(x) - T(x)] dS$  pour laquelle  $h_i = 60 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

De même, à l'interface acier/atmosphère, le flux thermique  $d\Phi_{\text{eTh}}$  à travers la surface d'aire  $dS$  orientée vers l'intérieur a pour expression :  $d\Phi_{\text{eTh}} = h_e [T_1 - T_e(x)] dS$  avec  $h_e = 30 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

On note  $d\Phi_{Th}$  la puissance thermique reçue par le gaz sur une longueur  $dx$  de canalisation.

En précisant l'analogie avec la loi d'Ohm en électricité, montrer que pour l'étude de  $d\Phi_{Th}$ , une longueur  $dx$  de canalisation peut se modéliser par l'association en série de trois résistances thermiques s'exprimant en fonction de  $h_i$ ,  $h_e$ ,  $K$ ,  $e$ ,  $r$  et  $dx$ . L'épaisseur  $e$  étant faible devant le rayon  $r$ , on assimilera la paroi de la canalisation à une couche plane d'épaisseur  $e$  et d'aire égale à celle d'une surface cylindrique de rayon  $r+e/2$ .

Exprimer  $d\Phi_{Th}$  sous la forme  $d\Phi_{Th}=G[T_1-T(x)]dx$  en donnant  $G$  en fonction des valeurs littérales. Pour la suite, on prendra  $G = 31,5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### c. Evolution de la température du gaz le long de la canalisation.

En appliquant à la longueur  $dx$  de canalisation un raisonnement thermodynamique identique à celui utilisé pour l'étude du détenteur, donner l'équation liant la variation d'enthalpie massique  $dh$  du méthane,  $D$  et  $d\Phi_{Th}$ .

En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $T(x)$  puis résoudre et donner littéralement  $T(x)$ .

Application numérique : pour quelle valeur de  $x$  la température du gaz est-elle revenue à  $0^\circ\text{C}$

### 3. Récupération éventuelle de la puissance mécanique.

A la place du détenteur, un ingénieur envisage de placer une turbine afin de récupérer la puissance mécanique disponible, l'état du gaz en amont étant toujours décrit par  $P_1$ ,  $T_1$  et la pression en aval valant encore  $P_2$ . On supposera la détente adiabatique réversible.

- 3.1. Pourquoi la présence de la turbine permet-elle de supposer la détente idéalement réversible ?
- 3.2. A partir des données, calculer l'entropie  $s_L$  du liquide saturant à la pression  $P_2$ .
- 3.3. Quel serait l'état du méthane à la sortie de la turbine ?
- 3.4. Donner alors la puissance mécanique récupérée par la turbine .
- 3.5. En fait de telles installations ne sont pas réalisées par GDF. Pourquoi ?

## PARTIE II . MÉCANIQUE DES FLUIDES.

*Après une étude cinématique très succincte relative à deux écoulements particuliers et qui n'est qu'un outil pour la suite, cette partie propose une modélisation de l'écoulement de l'air autour d'une aile afin d'en tirer quelques conséquences sur les actions qu'elle subit.*

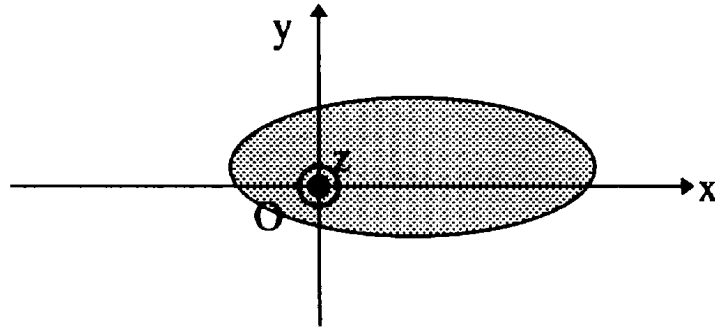
Dans tout le problème, l'air sera considéré comme un fluide incompressible de masse volumique  $\rho$  en écoulement stationnaire sur lequel la pesanteur aura une influence négligeable. Sauf indication contraire, ce fluide sera supposé parfait.

Les obstacles solides introduits dans cet écoulement seront à géométrie cylindrique (de base a priori quelconque), avec des génératrices parallèles à l'axe  $Oz$  perpendiculaire au plan de figure  $Oxy$  . On se limitera à une étude bidimensionnelle dans ce plan, les phénomènes étant supposés invariants par translation selon  $Oz$ .

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  désignera la base orthonormée directe associée au repère  $Oxyz$ .

Les coordonnées cylindriques d'axe polaire  $Oz$  seront notées  $r$ ,  $\theta$  et  $z$  avec  $Ox$  pour origine des angles.

L'écoulement du fluide en un point  $M$  sera décrit par sa vitesse eulérienne  $\vec{v}(M)$  .



## 0. Etude cinématique de deux écoulements particuliers.

### 0.1. Ecoulement tourbillonnaire.

On considère un écoulement orthoradial d'axe polaire Oz appelé tourbillon tel que

pour  $r < a$ ,  $\overrightarrow{\text{rot}}[\vec{v}(M)] = \gamma \cdot \vec{e}_z$  où  $\gamma$  est une constante algébrique.

pour  $r > a$ ,  $\overrightarrow{\text{rot}}[\vec{v}(M)] = \vec{0}$ .

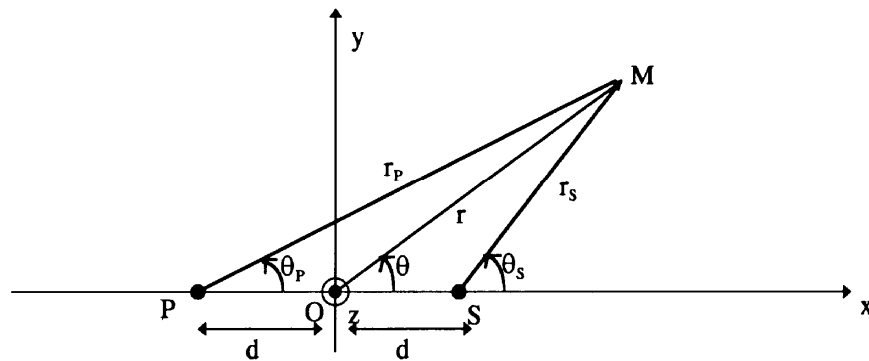
Ce tourbillon est dit ponctuel dans le plan Oxy si l'on considère que si  $a \rightarrow 0$  et  $\gamma \rightarrow \infty$ , le produit  $\pi a^2 \gamma$  demeure égal à la valeur finie  $\Gamma$  que l'on nomme intensité du tourbillon.

Etablir l'expression de  $\vec{v}(M)$  en coordonnées polaires ( $r > a$ ) avec  $\Gamma$  comme paramètre.

A quelle distribution électromagnétique peut-on éventuellement comparer cet écoulement ?

### 0.2. Ecoulement d'un doublet

On considère un écoulement engendré par un doublet résultant de l'association d'une source et d'un puits.



a. La source se situe le long de l'axe Sz, parallèle à Oz tel que le point S, placé dans le plan Oxy, ait pour coordonnées  $(d > 0, 0)$ . L'écoulement s'effectue radialement de façon homogène avec un débit volumique par unité de longueur D. L'exemple d'un tel écoulement pourrait être donné par un fin tuyau poreux dans lequel on ferait circuler de l'eau sous pression.

Etablir l'expression de la vitesse  $\vec{v}_s(M)$  du fluide en coordonnées cylindriques  $(r_s, \theta_s, z)$  d'axe polaire Sz ainsi que le potentiel  $\varphi_s(M)$  associé défini par  $\vec{v}_s(M) = \overrightarrow{\text{grad}}[\varphi_s(M)]$

b. Le puits se situe le long de l'axe Pz, parallèle à Oz tel que le point P situé dans le plan Oxy ait pour coordonnées  $(-d, 0)$ . Dans ce puits, le fluide arrive avec une répartition radiale uniforme dont le débit volumique par unité de longueur est également D.

Donner sans démonstration l'expression de la vitesse  $\vec{v}_p(M)$  du fluide en coordonnées cylindriques  $(r_p, \theta_p, z)$  d'axe polaire Pz ainsi que le potentiel  $\varphi_p(M)$  associé.

c. Soit  $\varphi(M)$  le potentiel des vitesses dans le cas où l'on associe la source et le puits pour former un doublet pour lequel  $d \rightarrow 0$  et  $D \rightarrow \infty$  de sorte que le produit  $2Dd$  demeure égal à la valeur finie  $H$  que l'on nommera intensité du doublet.

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  d'axe polaire Oz, montrer que  $\varphi(M) = -\frac{H \cos \theta}{2\pi r}$ .

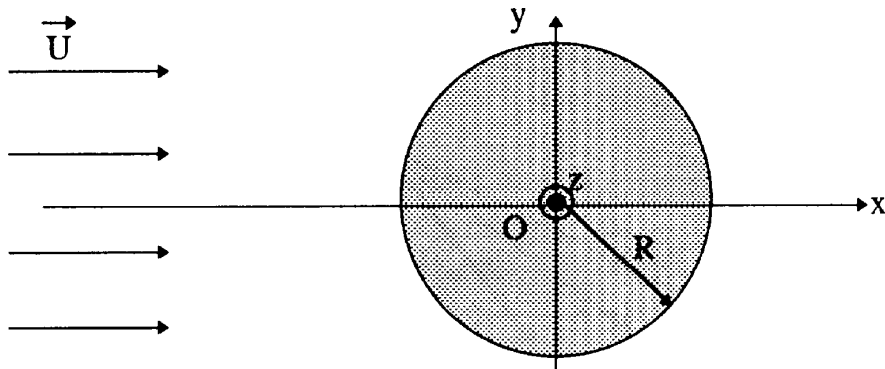
En déduire l'expression en coordonnées cylindriques de la vitesse  $\vec{v}(M)$  créée par ce doublet avec  $H$  comme paramètre.

d. A quelle distribution électromagnétique peut-on éventuellement comparer cet écoulement ?

*Dans la suite le paramètre  $H$  sera considéré comme une grandeur algébrique, c'est à dire que les positions du puits et de la source pourront être inversées.*

### 1. Ecoulement autour d'un cylindre en rotation.

Un cylindre à base circulaire de rayon  $R$  et en rotation uniforme à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de son axe Oz est placé dans l'air dont l'écoulement loin de cet obstacle se fait à la vitesse uniforme  $\vec{U} = U\vec{e}_x$  et à la pression  $P_0$ .



Pour étudier l'effet du cylindre sur le fluide nous utiliserons une méthode de superposition qui consiste à introduire à l'intérieur de l'obstacle des singularités telles que son contour soit une ligne de courant de l'écoulement. Ces singularités sont les suivantes :

Un doublet d'axe Oz et d'intensité  $H$  qui engendre un champ de vitesse  $\vec{v}_D(M)$

Un tourbillon également d'axe Oz et d'intensité  $\Gamma$  qui engendre un champ de vitesse  $\vec{v}_T(M)$

On pose alors  $\vec{v}(M) = \vec{v}_T(M) + \vec{v}_D(M) + \vec{U}$  en tout point  $M$  de l'écoulement.

#### 1. 1. Etude cinématique.

Les coordonnées polaires de la vitesse  $\vec{v}$  de cet écoulement ont pour expression

$$v_r = U \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \theta$$

$$v_\theta = -U \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

a. En s'appuyant sur des résultats établis précédemment, justifier ces expressions en explicitant le paramètre H en fonction de R et de U.

b. Donner en quelques lignes les raisons de l'introduction du tourbillon et du doublet dans la singularité modélisant l'effet du cylindre en rotation sur l'écoulement du fluide.

Le modèle d'écoulement proposé permet-il de relier quantitativement  $\Gamma$  à la vitesse angulaire  $\omega$  du cylindre ?

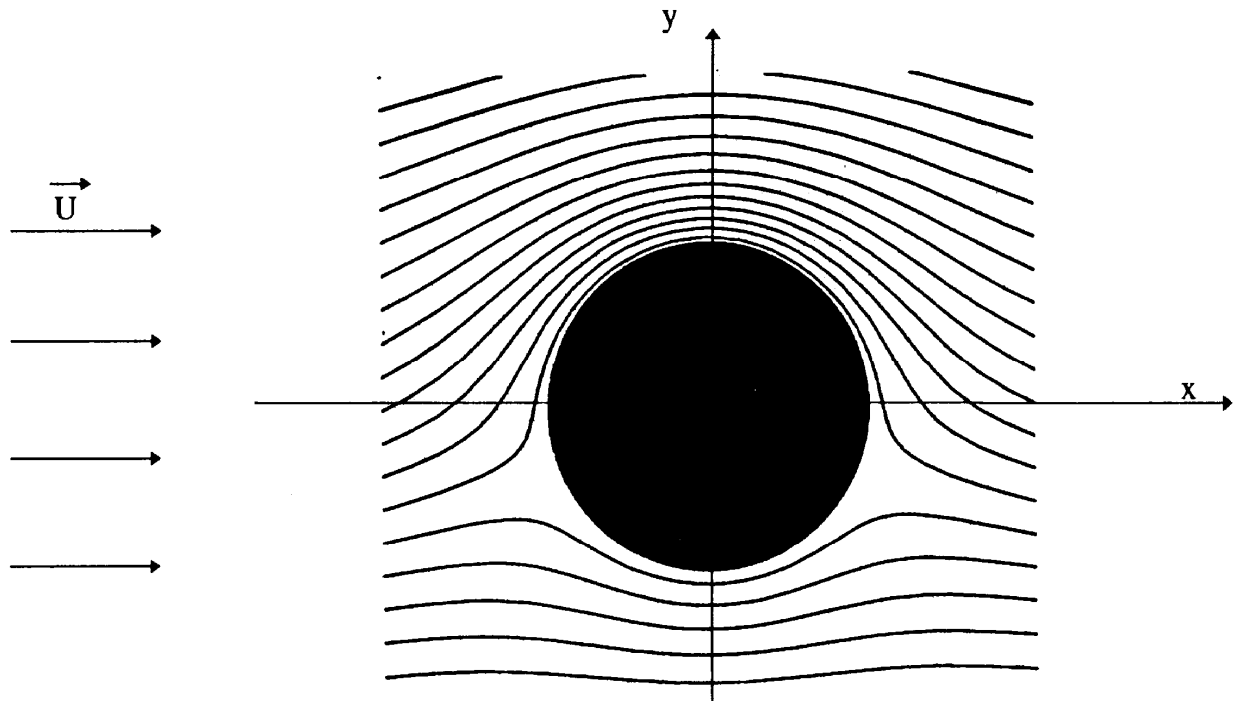
### 1.2. Mise en mouvement de l'air par le cylindre.

Le cylindre est initialement immobile dans l'air. On le soumet alors à une accélération angulaire pour lui communiquer finalement la vitesse angulaire constante  $\omega$  et arriver au régime d'écoulement décrit ci-dessus.

Cela est-il compatible avec les hypothèses précédentes sur l'air ? Expliquer.

### 1.3. Etude dynamique.

On donne ci-dessous le tracé des lignes de courant pour des valeurs particulières de U, R et  $\Gamma$ .



a. Comparer qualitativement le module  $v$  de la vitesse  $\vec{v}$  du fluide pour les points situés sur l'axe Oy selon que  $y > R$  ou  $y < -R$ .

b. Indiquer le signe de  $\Gamma$  et préciser si le sens de rotation du cylindre est horaire ou antihoraire .

c. En exploitant le tracé ci-dessus, justifier l'existence de points d'arrêt du fluide à la surface du cylindre. Donner  $|\Gamma|$  en fonction des paramètres U, R et du sinus d'un angle géométrique  $\theta_a$  dont on précisera dans ce cas la valeur numérique approchée en degrés ( $< 90^\circ$ ).

d. Soit  $\vec{F}$  la résultante de l'action de l'air sur le cylindre.

Donner, sans calcul mais en les justifiant, la valeur de la composante  $F_x$  et celle du moment par rapport à l'axe Oz de cette action. La réalité confirme-t-elle ce résultat ?

e. Exprimer la pression  $P(\theta)$  à la surface du cylindre avec  $U$ ,  $\rho$ ,  $R$ ,  $\Gamma$  et  $P_0$  comme paramètres.

f. Le cylindre ayant une hauteur  $h$ , établir l'expression de la composante  $F_y$  de  $\vec{F}$  en fonction de  $\rho$ ,  $U$ ,  $\Gamma$  et  $h$ , puis de  $\rho$ ,  $U$ ,  $R$ ,  $\sin \theta_a$  et  $h$ . Commenter en précisant les applications envisageables.

Donner une valeur approchée de  $F_y$  pour les valeurs numériques suivantes :  $U = 15 \text{ ms}^{-1}$ ,  $R = 1 \text{ m}$ ,  $h = 3 \text{ m}$  et  $\rho = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

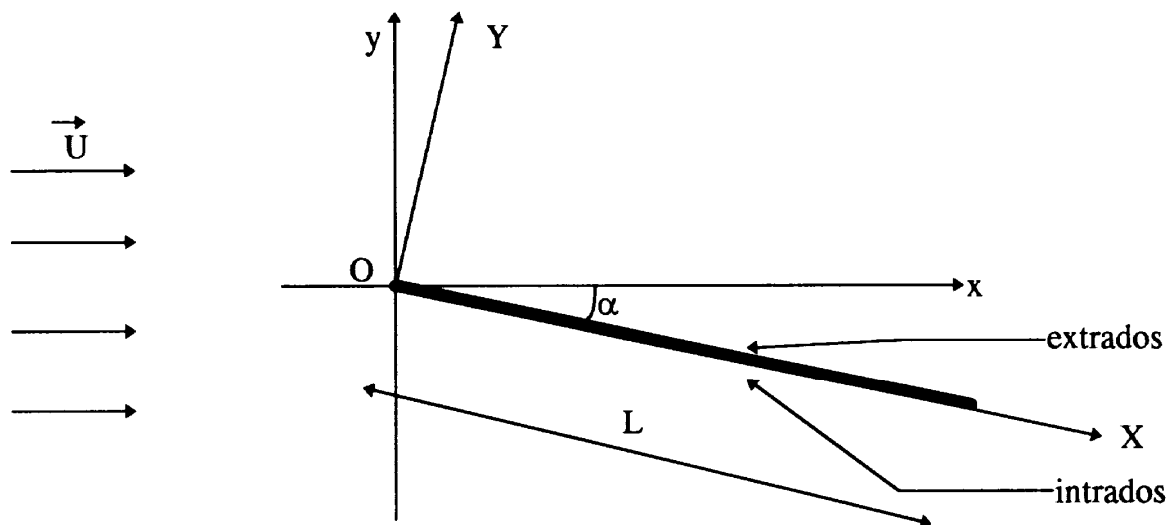
g. Comment les lignes de courant sont-elles modifiées si l'on prend en compte la viscosité  $\eta$  de l'air qui est de l'ordre  $10^{-5} \text{ Pa.s}$  ? Quel paradoxe lève-t-on ?

## 2. Ecoulement de l'air autour d'une aile modélisée.

On remplace le cylindre par une aile d'avion que l'on modélise par une plaque rectangulaire de largeur  $L$  que l'on appelle corde et de profondeur  $h$  que l'on appelle envergure. Cette plaque présente un angle de cabrage  $\alpha$ , angle géométrique positif dont la valeur sera toujours considérée comme faible. Les résultats littéraux seront simplifiés en tenant compte de cette hypothèse.

L'épaisseur  $a$  de cette plaque est négligeable.

La face supérieure de la plaque s'appelle l'extrados et la face inférieure l'intrados.



L'étude cinématique est analogue à celle de la partie 1 en introduisant une singularité de type tourbillonnaire sur la plaque. Cette singularité est définie par  $\text{rot}[\vec{v}(M)] = w(X) \cdot \vec{e}_z$  de sorte que le produit  $aw(X)$  demeure fini et égal à  $\gamma(X)$  quand on suppose  $a$  infiniment petite.

On obtient ainsi dans le plan de figure une nappe tourbillonnaire à intensité répartie sur une longueur  $L$  le long de l'axe OX.

Si l'on désigne par  $\vec{v}_T(M)$  la vitesse de l'air autour de l'aile engendrée par le tourbillon, alors la vitesse de l'écoulement a pour expression  $\vec{v}(M) = \vec{v}_T(M) + \vec{U}$ .



Une investigation plus approfondie permet d'aboutir à  $\gamma(X) = -2U\alpha\sqrt{\frac{L-X}{X}}$

Donnée complémentaire :  $\int_0^L \sqrt{\frac{L-x}{x}} dx = \frac{\pi L}{2}$

2. 1. La singularité tourbillonnaire évoque une analogie avec la magnéto-statique.

Illustrer par un dessin et sans faire de calcul le champ magnétique  $\vec{B}$  à produit par une nappe surfacique plane de courant uniforme. Quelle est la symétrie de ce champ magnétique ? Quelle est sa discontinuité à la traversée de la nappe de courant ?

Quelle symétrie présente le champ des vitesses  $\vec{v}_T(M)$  par rapport au plan OXZ ? Quelle est sa discontinuité à la traversée de la singularité tourbillonnaire ?

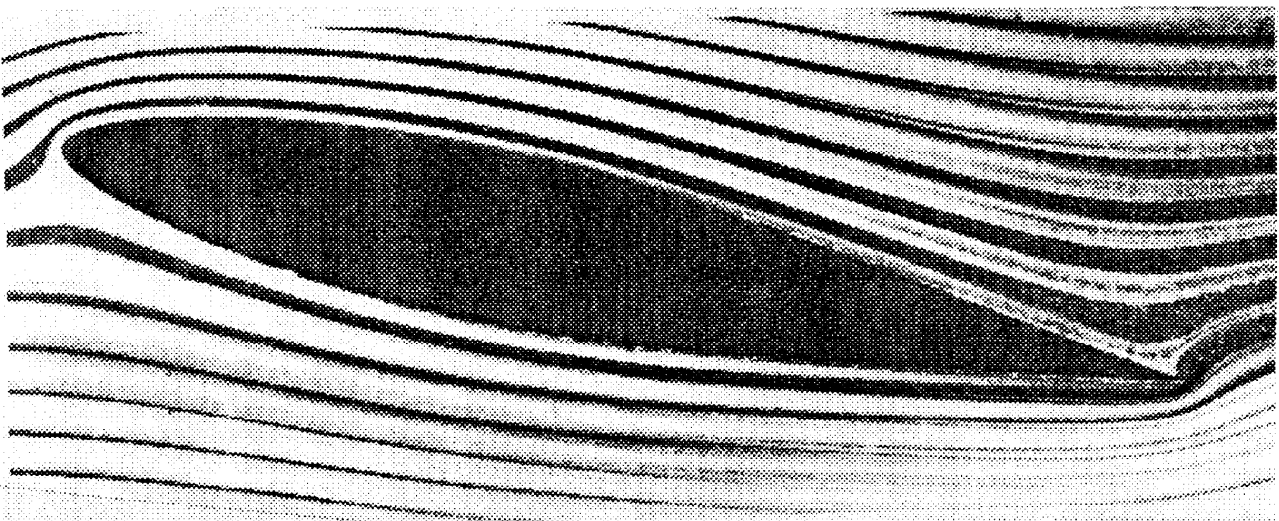
2.2. Si l'on note  $v_{T,t,e}(X)$  la composante tangentielle (indice t) sur le vecteur de base  $\vec{u}_X$  de  $\vec{v}_T(M)$  à la surface de l'extrados (indice e) donner en fonction de  $v_{T,t,e}(X)$  et en utilisant la symétrie de ce champ des vitesses, l'expression de la composante tangentielle  $v_{T,t,i}(X)$  de  $\vec{v}_T(M)$  sur  $\vec{u}_X$  à la surface de l'intrados (indice i).

2.3. De la discontinuité du champ des vitesses, déduire  $v_{T,t,e}(X)$  et  $v_{T,t,i}(X)$  en fonction de  $\gamma(X)$ .

2.4. Donner les composantes tangentielles  $v_{t,e}(X)$  et  $v_{t,i}(X)$  de la vitesse totale de l'écoulement de l'air à la surface respectivement de l'extrados et de l'intrados en fonction de U et  $\gamma(X)$ . Exprimer en fonction de U et  $\alpha$  les composantes normales  $v_{T,n,e}(X)$  et  $v_{T,n,i}(X)$  de  $\vec{v}_T(M)$  sur  $\vec{u}_Y$  au niveau de l'extrados et de l'intrados.

2.5. Tracer pour X variant de 0 à L l'allure des courbes représentatives de  $v_{T,t,e}(X)$  et  $v_{T,t,i}(X)$ . Préciser notamment l'existence éventuelle de points d'arrêt et donner s'il y a lieu leurs abscisses  $X_{ae}$  et  $X_{ai}$ .

2.6. On donne ci-dessous la reproduction d'une photographie des lignes de courant d'un écoulement d'huile autour d'un profil d'aile présentant un angle de cabrage de  $13^\circ$ . Commenter cette photographie en se référant à l'étude théorique précédente.



2.7. Exprimer les pressions  $P_e(X)$  et  $P_i(X)$  au niveau de l'extrados et de l'intrados en fonction de  $U$ ,  $\rho$ ,  $\gamma(X)$  et  $P_0$ .

2.8. Exprimer la composante  $F_y$  de la résultante de l'action de l'air sur l'aile en fonction de  $h$ ,  $U$ ,  $\rho$ , et  $|\Gamma| = \int_0^L |\gamma(X)| dX$ , puis finalement en fonction de  $h$ ,  $U$ ,  $\rho$ ,  $L$  et  $\alpha$ . Comparer au résultat obtenu pour le cylindre.

2.9. Application.

Un petit avion possède une masse totale  $m$  de 700 kg. On suppose que la portance s'exerce uniquement sur les ailes dont l'envergure est  $h = 5$  m et la corde  $L = 1,5$  m. L'angle de cabrage  $\alpha$  vaut  $12^\circ$ .

Quelle doit être la vitesse minimale (en km/h) de l'avion au décollage ?

On prendra  $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$  et on rappelle que  $\rho = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$  pour l'air.

2. 10. Dans la réalité, les résultats précédents sont bien vérifiés pour des angles de cabrage inférieurs à  $16^\circ$ . Au delà, on constate une diminution brutale de  $F_y$ . Interpréter.

**Fin de l'énoncé**