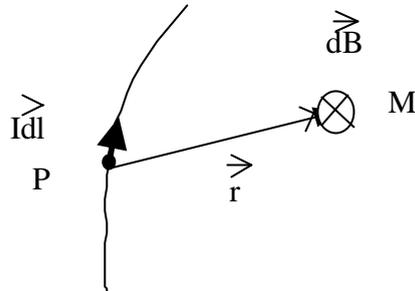


Premier problème: Champs magnétiques

1.

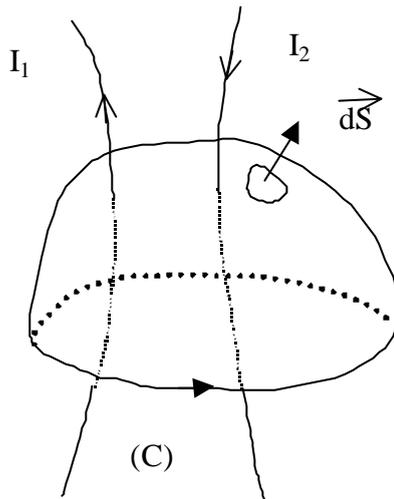


2. Equation de Maxwell-Ampère: $\text{rot} \vec{B} = W_0 \vec{j} + P_0 \frac{\vec{E}}{r}$

Dans l'ARQS le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction: $\text{rot} \vec{B} = W_0 \vec{j}$

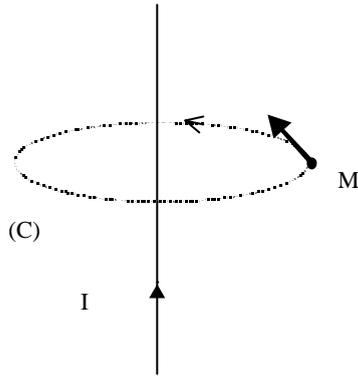
3. Pour un contour (C) orienté, l'orientation d'une surface S s'appuyant sur le contour (C) est donnée par la règle de Stokes ou du "tire-bouchon"

$\oint_S \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S W_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = W_0 I$ où $I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ est le courant enlacé par le circuit. On obtient ainsi le théorème d'Ampère: La circulation du champ magnétique sur un contour orienté est égal dans l'ARQS au produit de W_0 par le courant enlacé par le circuit.



$I = I_1 - I_2$

4. Selon 1.1. Les contributions $d\vec{B}$ des éléments $d\vec{l}$ en un point M sont toutes de même direction et de même sens. $\vec{B} \cdot \vec{u}_S$ est orthoradial: $\vec{B} \cdot \vec{u}_S = B \sin \theta$



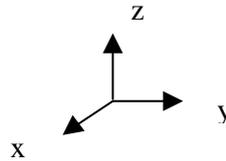
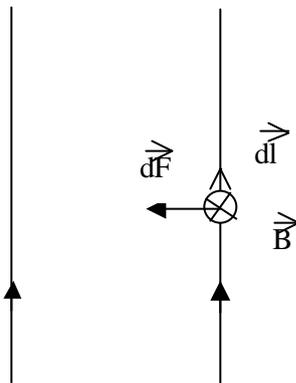
En choisissant comme contour (C) le cercle passant par M et ayant pour axe le fil :

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_C B \cdot dl = W_0 I. \text{ D'où } \vec{B} \cdot \vec{u}_\phi = \frac{W_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi$$

5. $B = 2.10^{-75} T$ et $r = 2,5.10^{-22} m$. Pour $r > 2,5 cm$, le champ magnétique créé par le fil est plus faible que la composante horizontale du champ magnétique terrestre.

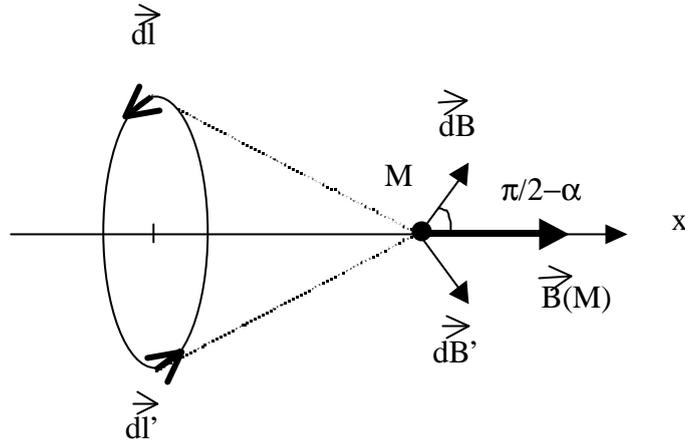
6.a. La force de Laplace élémentaire s'exerçant sur l'élément de conducteur $d\vec{l}$ est $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} = dC \wedge \vec{B}$.

$$6.b. d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} = I d\vec{l} \wedge \frac{W_0 I}{2\pi d} \vec{u}_\phi = \frac{W_0 I^2}{2\pi d} d\vec{l} \wedge \vec{u}_\phi$$



6.c. La force entre les deux fils est une force attractive contrairement à la force électrostatique qui s'exerce entre deux charges de même signe. Les deux forces ne sont pas comparables, les circuits n'étant pas des monopôles magnétiques.

7.a. Deux éléments de circuit symétriques par rapport à O créent des champs magnétiques $d\vec{B}$ et $d\vec{B}'$ symétriques par rapport à l'axe (Ox). Le champ magnétique résultant est porté par l'axe (Ox).



7.b. Pour une spire, la projection dB_x de \vec{dB} vaut: $dB_x = \frac{W_0 I dl}{4 \cdot R \sin^2 \alpha} \cos \alpha$? $J \cdot \vec{p} = \frac{W_0 I dl}{4 \cdot R^2} \sin^3 \alpha$.

Soit en intégrant sur la circonférence: $\vec{B}(\vec{M}) = \frac{W_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \int \vec{u}_x$

7.c. $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$? $\vec{B}(\vec{M}) = \frac{W_0 I R^2}{2 \sqrt{R^2 + x^2}^3} \vec{u}_x$? $\vec{B}(\vec{M}) = B_0 \left(\frac{R^2}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)^{\frac{3}{2}} \vec{u}_x$

8. Chaque bobine est la superposition de N spires. Ainsi le champ créé par la bobine 1 est

$\vec{B}_1(\vec{M}) = NB_0 \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)^{\frac{3}{2}} \vec{u}_x$ et le champ créé par la bobine 2 est $\vec{B}_2(\vec{M}) = NB_0 \left(\frac{R^2}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)^{\frac{3}{2}} \vec{u}_x$. Le champ total $\vec{B}(\vec{M}) = NB_0 \left[\left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{R^2}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \vec{u}_x$, soit $B(\vec{M}) = f \frac{d}{2} + x \cdot p + f \frac{d}{2} \cdot x \cdot p$ avec $f \cdot p = NB_0 \left(\frac{R^2}{R^2 + d^2} \right)^{\frac{3}{2}}$

9. Pour $d=R$, au voisinage de $x=0$ (pour $\frac{x}{d}$ tendant vers 0),

$$\begin{aligned} f \frac{d}{2} + x \cdot p &= NB_0 \left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{d^2}} \right)^{\frac{3}{2}} = NB_0 \frac{1}{\left(\frac{5}{4} + \frac{x^2}{d^2} \right)^{\frac{3}{2}}} = NB_0 \frac{4}{5} \left[1 - \frac{3}{5} \frac{x^2}{d^2} + \frac{27}{125} \frac{x^4}{d^4} - \dots \right] \\ &= f \frac{d}{2} \left[1 - \frac{3}{5} \frac{x^2}{d^2} + \frac{27}{125} \frac{x^4}{d^4} - \dots \right] + \frac{27}{125} \frac{x^4}{d^4} \left[\frac{4}{5} \frac{x^2}{d^2} + \dots \right] + o \left(\frac{x^6}{d^6} \right) \\ f \frac{d}{2} \cdot x \cdot p &= f \frac{d}{2} \left[1 - \frac{3}{5} \frac{x^2}{d^2} + \frac{27}{125} \frac{x^4}{d^4} - \dots \right] + \frac{27}{125} \frac{x^4}{d^4} \left[\frac{4}{5} \frac{x^2}{d^2} + \dots \right] + o \left(\frac{x^6}{d^6} \right) \\ B(\vec{M}) &= f \frac{d}{2} + x \cdot p + f \frac{d}{2} \cdot x \cdot p \end{aligned}$$

Les termes impairs en x disparaissent. En gardant les termes de degré ≤ 3 en x, on obtient:

$$B(\vec{M}) = 2f \frac{d}{2} \left[1 + \frac{27}{125} \frac{x^4}{d^4} \right] = 2f \frac{d}{2} \left[1 + o \left(\frac{x^4}{d^4} \right) \right]$$

Les bobines de Helmholtz distantes de $d=R$ permettent d'avoir un champ qui varie très peu sur une zone assez large (voir

10)

$$10. B(\vec{0}_1) = B(\vec{0}_2) = 4,25 \cdot 10^{23} T$$

$$B(\vec{0}) = 4,49 \cdot 10^{23} T$$

11. $\frac{\Delta B}{B} = 0,055$. Entre les deux bobines, le champ est constant à 5,5% près.

12. La contribution de l'élément de solénoïde compris entre x et $x+dx$ au champ magnétique en M est

$$d\vec{B}(\vec{M}) = \frac{W_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_x \cdot ndx. \text{ Soit } \vec{B}(\vec{M}) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{W_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_x \cdot ndx = \vec{u}_x \int_{x_1}^{x_2} \frac{W_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \cdot n dx = \frac{W_0 I n}{2R} \int_{x_1}^{x_2} \sin^3 \alpha dx$$

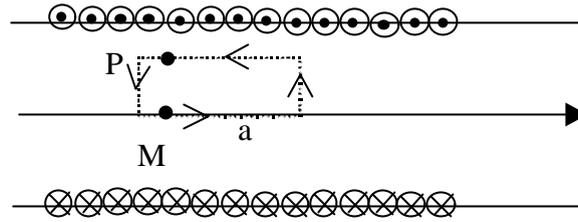
Si le solénoïde est infiniment long, $\vec{B}(\vec{M}) = W_0 n I \vec{u}_x$

13.a. En un point d'un plan de symétrie d'une distribution de courant, le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan. Tout plan perpendiculaire à l'axe est plan de symétrie, donc en un point P quelconque $\vec{B}(\vec{M}) = B(\vec{P}) \vec{u}_x$

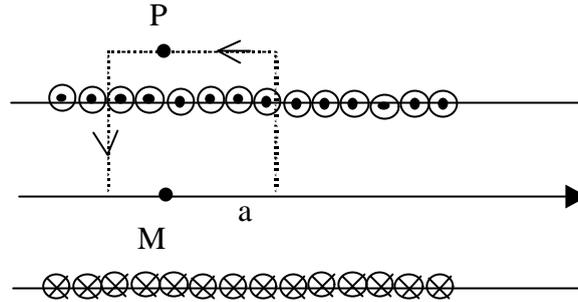
13.b. Il y a invariance de la distribution de courants par translation parallèle à $(x'x)$ et par rotation autour de l'axe $(x'x)$, donc $B(P)$ ne dépend que de la distance r de P à l'axe.

On utilisant un contour d'Ampère rectangulaire,

Pour P intérieur au solénoïde:



$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \int dl = B \cdot 2\pi a$. Le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde.
 Pour P extérieur au solénoïde:



$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = W_0 n a I \int dl = W_0 n a I \cdot 2\pi a = W_0 n a^2 I \cdot 2\pi = 0.$$

Deuxième problème: A propos d'oscillations...

Première partie: Oscillateur mécanique.

1.a. Le mobile est soumis aux deux forces de tension F_1 et F_2 exercées par les ressorts, à son poids \vec{P} et à la réaction de la tige horizontale \vec{R} . La réaction \vec{R} est perpendiculaire à l'axe horizontal puisqu'on néglige tout frottement.

$$F_1 = k_1 l_1 = k_1 (l_0 + x) = k_1 l_0 + k_1 x$$

$$F_2 = k_2 l_2 = k_2 (l_0 - x) = k_2 l_0 - k_2 x$$

Par application de la relation fondamentale de la dynamique projetée sur (x): $m \ddot{x} + 2kx = 0$

1.b. On obtient l'équation d'un oscillateur harmonique: $\ddot{x} + g_0^2 x = 0$ de pulsation $g_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ et de période $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$

1.c. $x(t) = x_0 \cos(g_0 t)$

2. $F_1 + F_2 = \text{grad} E_p = kx = k l_0 \cos(g_0 t)$ en choisissant $E_p = 0$ pour $x = 0$.

$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 \sin^2(g_0 t)$

$E_{\text{tot}} = E_p + E_c = k l_0 \cos^2(g_0 t) + \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 \sin^2(g_0 t) = 2kx_0^2$

On observe que $\langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle$ et on vérifie que l'énergie mécanique est constante.

3.a. On ajoute la force f au bilan des forces précédent: $m \ddot{x} + W \dot{x} + 2kx = 0$, soit $\ddot{x} + h \dot{x} + g_0^2 x = 0$

3.b. La nature du mouvement est donnée par le signe du discriminant de l'équation caractéristique: $r^2 + hr + g_0^2 = 0$. Le mouvement est oscillatoire amorti pour $A = h^2 < 4g_0^2$; soit $W < 2\sqrt{km}$

3.c. La solution générale est de la forme: $x(t) = A e^{-\frac{ht}{2}} \cos(\sqrt{g_0^2 - \frac{h^2}{4}} t)$

3.d. La pseudo-période est $T = \frac{2\pi}{\sqrt{g_0^2 - \frac{h^2}{4}}}$

3.e. Le mouvement oscillatoire se produit jusqu'à la dissipation totale de l'énergie mécanique disponible par frottements. Initialement $E_c = 0, E_p = kx_0^2$ et quand $t \rightarrow \infty, E_c \rightarrow 0$, et $E_p \rightarrow 0$. L'énergie totale dissipée par frottements est égale à la diminution d'énergie mécanique, soit $W = kx_0^2$

Deuxième partie: oscillateur électrique

4.a. $E_m = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2} L \dot{q}^2$

4.b. Il y a dissipation d'énergie par effet Joule dans la résistance. L'énergie électromagnétique diminue et $\frac{dE_m}{dt} = -r \dot{q}^2$.

4.c. $\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2} L \dot{q}^2 \right) = -r \dot{q}^2$. Soit avec $i = \dot{q}, \dot{q} = \frac{dq}{dt} + L \ddot{q} + r \dot{q} = 0$. On en déduit pour la décharge du

condensateur: $q + \frac{g_0}{Q_0} q + G_0^2 q = 0$.

5.a. Le discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle doit être négatif, soit $Q_0 > \frac{1}{2}$.

5.b. L'évolution de $q(t)$ est de type oscillatoire amorti avec une pseudo-période $T = \frac{2\pi}{g_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}}$, soit $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}}$. On

obtient: $T > T_0$.

Troisième partie: Analogie électromécanique

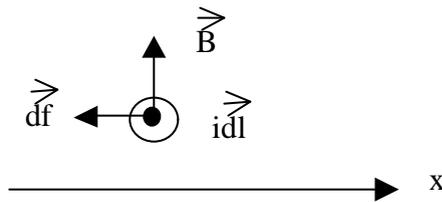
Les parties 1 et 2 ont fourni: $m \ddot{x} + W \dot{x} + 2kx = 0$ et $L \ddot{q} + r \dot{q} + \frac{q}{C} = 0$

On obtient les analogies formelles suivantes:

coefficient de rappel k ($2k$)	capacité C
masse du mobile m	inductance L
coefficient de frottement fluide W	résistance r
coordonnée de position x	charge du condensateur q
vitesse du mobile v	courant i
énergie cinétique du mobile	énergie stockée dans l'inductance
énergie potentielle élastique du ressort	énergie stockée dans la capacité
puissance dissipée par frottements	puissance dissipée par effet Joule

Quatrième partie: Haut-parleur électrodynamique

7.a.



7.b. $\vec{df} = ? i B d\vec{l} \times \vec{x}$. En intégrant sur la longueur de l'enroulement: $\vec{f} = ? i B l \vec{x}$.

7.c. En projetant sur l'axe ($x'x$) le principe fondamental de la dynamique, on obtient: $m \ddot{x} = ? kx - W \dot{x} - B i l$

8.a. $e_{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \vec{v} \cdot \vec{B} dl$, l'intégration se faisant sur l'enroulement, avec: $\vec{v} = v \vec{e}_x, B = B \vec{e}_r, dl = dl \vec{e}_s$.

D'où $e_{\mathcal{V}} = v B l$.

8.b. La loi des mailles entre deux points A et B s'écrit: $u_{AB} = R i_{AB} + e_{AB}$. Ici entre les bornes d'entrée du haut-parleur

$$e_{AB} = ? L \frac{di}{dt} + e_{\mathcal{V}}$$

D'où: $u = R i + L \frac{di}{dt} + B l v$

9. a. (1) $m j \omega \underline{v} = ? k \frac{1}{j \omega} \underline{v} - W \underline{v} + B l \underline{i}$, soit $m j \omega \underline{v} = ? k \frac{1}{j \omega} \underline{v} - W \underline{v} + B l \underline{i}$ et $\underline{v} = \frac{? B l}{m j \omega + W + \frac{k}{j \omega}} \underline{i}$

(2) $\underline{u} = R \underline{i} + j L \omega \underline{i} + B l \underline{v}$, soit $\underline{u} = \underline{V} R + j L \omega \underline{i} + B l \underline{v}$

9.b. En éliminant \underline{v} entre les deux équations précédentes: $\underline{u} = \underline{V} R + j L \omega \underline{i} + \frac{B^2 l^2}{m j \omega + W + \frac{k}{j \omega}} \underline{i}$

$$\text{Donc } \underline{Z} = R + j L \omega + \frac{B^2 l^2}{m j \omega + W + \frac{k}{j \omega}}$$

9.c. $\underline{Z} = R + j L \omega + \underline{Z}_m$ avec $\underline{Z}_m = \frac{B^2 l^2}{m j \omega + W + \frac{k}{j \omega}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j L_1 \omega} + j C_1 \omega}$ avec $R_1 = \frac{W}{B^2 l^2}$, $L_1 = \frac{B^2 l^2}{k}$, $C_1 = \frac{m}{B^2 l^2}$

9.d. L'impédance d'entrée du haut-parleur se présente comme l'association en série de la résistance R , de l'inductance L et d'un dipôle d'impédance \underline{Z}_m résultant de l'association en parallèle d'une résistance R_1 , d'une capacité C_1 et d'une inductance L_1 .

