MATHÉMATIQUES

Exercice 1

f est l'unique fonction impaire de période 2π, valant 1 sur l'intervalle]0,π[et 0 en π.

ø1 Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

ø2 Exprimer $\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{4N}\frac{\sin\left((2p+1)k\frac{\pi}{4}\right)}{2p+1}\sin\left(3k\frac{\pi}{4}\right)\right)$ o— $k \in$ ¢ à l'aide de f.

ø3 Montrer la convergence de la suite $S_{N} = \sum_{p=-N}^{N}\frac{1}{8p+5}$ indexée par N. On note S sa limite.

ø4 Pour le calcul de S, on définit $\sigma_p = \sum_{k=0}^{7}\sin\left((2p+1)k\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3k\frac{\pi}{4}\right)$ o— $p \in$ ¢.

(**a**) Calculer pour chaque p la valeur de σ_p, sachant que $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = 4$ et $\sigma_2 = -4$.

(**b**) Montrer la convergence de la suite $\sum_{p=0}^{4N}\frac{\sigma_p}{2p+1}$ indexée par N. On note L sa limite.

(**c**) Calculer la somme de Riemann définie par les extrémités de gauche de huit sous-intervalles consécutifs de longueur $\frac{\pi}{4}$ approchant l'intégrale $\int_0^{2\pi}f(t)\sin(3t)\,dt$.

(**d**) En déduire la valeur de L, puis celle de S.

[figure]

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On recherche les trajectoires des arcs paramétrés $t\to(x(t),y(t))$ solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t)+y(t) \\ y'(t) = x(t)\,y(t) \end{cases}$$

On rappelle qu'une trajectoire est un ensemble de points. Sur la figure de la page ci-contre, le champ de vecteurs $(x,y)\to(x^2+y,xy)$ est représenté en sens et direction.

On admettra l'existence et l'unicité d'une solution du système différentiel donné vérifiant des conditions initiales $x(0) = u$, $y(0) = v$.

ø1 Expliciter cette solution pour $u = 0$ et $v = 0$.

ø2 Recherche des trajectoires rectilignes.

(**a**) Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$.

(**b**) Que peut-on dire de ce déterminant si la trajectoire présente une inflexion ?

(**c**) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle $x' = x^2$.

(**d**) Préciser la ou les trajectoires incluses dans une droite.

ø3 Recherche des trajectoires tracées sur un cercle centré sur l'axe Oy et passant par l'origine.

(**a**) Déterminer une courbe contenant les points o— la trajectoire présente une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

(**b**) En déduire l'unique cercle centré sur l'axe Oy, passant par l'origine, le point (0,a) et contenant une trajectoire du système différentiel considéré.

(**c**) Réciproquement, préciser pour cette valeur de a la nature de la solution maximale passant par (0,a) à l'instant t = 0, en utilisant par exemple la combinaison $[(x'y-y'x)/(y^2)]$\cdotp

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur £, o— n\mathrel > 1, et u un endomorphisme de cet espace. Pour k entier naturel non nul, u^k est la composée (u°u°...°u) o— u apparaŒt k fois; u^0 est l'application identique.

Pour un vecteur x de E, on appelle orbite de x selon u le sous-espace de E engendré par les images successives de x : $\mathrm{Orb}_u(x) = \mathrm{Vect}\,\{x,u(x),u^2(x),\ldots,u^{n-1}(x)\}$. L'endomorphisme u est dit cyclique s'il existe un vecteur particulier x_0 réalisant l'égalité $E = \mathrm{Orb}_u(x_0)$.

ø1 *Étude d'un exemple*

Ici l'espace E est de dimension 4. Après quelques recherches, on a pu déterminer deux vecteurs vérifiant les propriétés suivantes :

- le vecteur a vérifie : (a,u(a)) est libre et $2\,u^2(a)-u(a)-a = 0$,
- le vecteur b vérifie : $(b,u(b),u^2(b))$ est libre et $u^3(b)-u^2(b)+u(b)-b = 0$.

(**a**) Démontrer que la dimension de $\mathrm{Orb}_u(a)$ est égale à 2.

(**b**) Démontrer que la restriction de u à l'orbite de a est diagonalisable et préciser la matrice de cette restriction dans une base de diagonalisation (e_1,e_2). Énoncer sans démonstration des résultats identiques concernant la restriction de u à l'orbite de b.

(**c**) Montrer que u est diagonalisable.

Par la suite, on notera (e_1,e_2,e_3,e_4) une base de diagonalisation, e_1 étant commun aux deux orbites et e_2 étant associé à une valeur propre réelle.

(**d**) Déterminer un vecteur c dont l'orbite est de dimension 3, la rectriction de u à cette orbite étant annulée par le polynôme $P(t) = (2t+1)\,(t^2+1)$. Exprimer ce vecteur dans la base de diagonalisation.

(**e**) En déduire que l'orbite de a+b n'est pas nécessairement de dimension 4.

(**f**) Préciser un vecteur d telle que l'orbite de b+d soit de dimension 4.

ø2 *Une condition nécessaire*

On revient au cas de dimension n, et l'on suppose que l'endomorphisme u est cyclique, x_0 étant l'un des vecteurs d'orbite maximale définis dans le préambule, B étant alors la base $(x_0,u(x_0),u^2(x_0),\ldots,u^{(n-1)}(x_0))$.

(**a**) Préciser la matrice A de l'application u dans la base B.

(**b**) Préciser la première colonne des matrices A^k, k étant un entier compris entre 0 et n–1.

(**c**) En déduire une condition nécessaire portant sur son polynôme minimal pour qu'un endomorphisme soit cyclique.
