MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, F un sous-espace de E et G un groupe fini d'automorphismes linéaires de E, de cardinal m, tel que F soit stable par tout élément g de G.

Le produit $u \circ v$ de deux endomorphismes de E sera noté plus simplement uv.

À tout endomorphisme u de E, on associe u^+ défini par :

$$u^+ = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u g.$$

1°. Montrer que u^+ est un endomorphisme de E commutant avec tout élément h de G.

2°. Calculer $(u^+)^+$.

3°. Calculer la trace de u^+ en fonction de celle de u.

4°. Soit p un projecteur de E d'image F. Montrer que F est inclus dans l'image de p^+.

5°. Montrer que, pour tous g et h de G, on a $\quad g^{-1}pgh^{-1}ph = h^{-1}ph.$

6°. Montrer que p^+ est un projecteur.

7°. Comparer les images de p et de p^+.

8°. Montrer que le noyau de p^+ est un supplémentaire de F stable par tout élément g de G.

9°. Montrer que tout sous–espace vectoriel de E stable par tout g de G admet un supplémentaire stable par tout g de G.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ privée du couple $(0,0)$ par la relation :

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Soient u, v et ρ des nombres réels liés par les relations $0 < \rho = \sqrt{u^2 + v^2} \leqslant 1$.

1°. Démontrer les inégalités $|u+v| \leqslant \rho\sqrt{2}$ **et** $|u-v| \leqslant \rho\sqrt{2}$.

2°. Soit $D(u,v) = 2(u+1)^2 + 2(v+1)^2$. **Démontrer l'inégalité** $3\,D(u,v) > 1$.

3°. Soit, sous les mêmes conditions, $N(u,v) = (u^2 - v^2)(u^2 + v^2) + 4\,uv\,(u-v)$. **Démontrer l'inégalité** $|N(u,v)| \leqslant 2\rho^3\sqrt{2} + \rho^4$.

4°. Soit, sous les mêmes conditions, $g(u,v) = f(1+u, 1+v) - (u-v) - \dfrac{v^2 - u^2}{2}\cdot$ **Montrer que** $\dfrac{|g(u,v)|}{\rho^3}$ **est borné par une constante indépendante de ρ lorsque ρ tend vers zéro (on déterminera une telle constante sous la forme d'un entier).**

5°. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en un point (x,y).

6°. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f en un point (x,y).

7°. Interpréter à la lumière de ces résultats la majoration obtenue dans la question 4°.

8°. Calculer la tangente de l'angle θ du plan d'équation $z = 0$ et du plan tangent au point (x,y,z) de la surface définie par l'équation $z = f(x,y)$ **dans un repère orthonormé.**

9°. Décrire le mouvement de ce plan tangent lorsque le point $(x,y,0)$ décrit une demi–droite du plan $z = 0$ d'origine $(0,0)$.

Exercice 3

L'exercice étudie quelques propriétés des triangles pseudo–rectangles, c'est–à–dire des triangles ABC d'un plan euclidien dont les mesures des angles, par définition strictement comprises entre 0 et π, notées $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$, vérifient la relation :

$$\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{2} \cdot$$

Les longueurs des côtés sont notées $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Les questions ci–dessous sont largement indépendantes entre elles.

1°. Décomposer un triangle équilatéral en trois triangles pseudo–rectangles.

2°. Déterminer le milieu du segment BB' où B' est l'intersection de la droite BC et de la perpendiculaire issue de A à la droite AC.

3°. Que peut–on dire des angles de la droite BC avec les deux bissectrices de l'angle en A du triangle ABC ?

4°. Calculer $\hat{B}$, $\hat{C}$, a, b, c et l'aire S du triangle en fonction de $\hat{A}$ et du rayon R de son cercle circonscrit.

5°. Les points B et C étant fixés dans le plan, indiquer une construction géométrique du troisième sommet A à partir de la mesure de l'angle en C. Quel est le lieu de ce sommet ?

6°. Que peut–on dire de la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC ?

7°. Que peut–on dire de l'orthocentre du triangle ABC ?

8°. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\hat{A}$, R et la distance h de A à la droite BC pour qu'un triangle soit pseudo–rectangle.