(version dimanche 19 mai 2002 : 7h19)

CONCOURS E3A : ENSAM-ESTP-ECRIN-ARCHIMEDE 10 MAI 02 8h-11h : Mathématiques 2 MP

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée

Exercice 1

On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle $[c,d]$ de $\mathbb{R}$ est affine s'il existe des réels A, B tels que $\forall x \in [c,d],\ f(x) = Ax + B$. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}(a,b])$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Soit n un entier naturel non nul et soient $a_0, a_1, ..., a_n$ $(n+1)$ réels tels que : $a = a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} < a_n = b$.

Ils définissent une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, $(0 \leq i < n)$. On considère E le sous ensemble de $\mathcal{C}(a,b])$ formé par les fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dont les restrictions à chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ sont affines

Des exemples de fonctions de E :

(1) Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq n$. On note φ_i la fonction définie sur $[a,b]$ par : $\forall x \in [a,b], \varphi_i(x) = |x - a_i|$.

(1-a) Montrer que φ_i est un élément de E.

(1-b) Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq n$. Montrer qu'il existe un unique élément δ_i de E, vérifiant : $\delta_i(a_i) = 1$ et pour tout $j \neq i$, $\delta_i(a_j) = 0$.

---

(2) On pose $\mathcal{B} = (\delta_0, \delta_1, ..., \delta_n)$ et $\mathcal{C} = (\varphi_0 \varphi_1, ..., \varphi_n)$, les fonctions φ_i et δ_i étant celles définies au (1).

(2-a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([a,b])$.

(2-b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

(2-c) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E. (*indication :* Soient $\alpha_0, ..., \alpha_n$ des réels tels que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0$. On pourra étudier la fonction $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0$ au voisinage de α_j, pour $j \in \{0, ..., n\}$).

---

(3) **Un cas particulier.** Soient $u, v, w \in \mathbb{R}$ tels que $u < v < w$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue nulle en dehors de $]u,w[$, affine sur $[u,v]$ et sur $[v,w]$ et telle que $g(v) = 1$. Déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \alpha|x-u| + \beta|x-v| + \gamma|x-w|$.

---

(4) **Retour au cas général.** Soit $f \in E$. *On se propose d'exprimer formellement f sur la base $\mathcal{C}$.*

(4-a) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

(4-b) Par quel calcul matriciel pourrait-on obtenir, une expression de f comme combinaison linéaire de $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n$?

---

(5) Dans cette question on suppose la subdivision régulière, c'est à dire que pour tout i $(0 \leq i < n)$, on a : $a_{i+1} - a_i = \frac{(b-a)}{n}$.

(5-a) Expliciter alors la matrice P de la question (4-a) et calculer son déterminant.

(5-b) Pour tout i $(0 \leq i < n)$, exprimer δ_i en fonction de φ_{i-1}, φ_i et φ_{i+1}.

(5-c) On note $C_0, C_1, ..., C_n$ les $(n+1)$ colonnes de la matrice P^{-1}. Expliciter $C_1, ..., C_{n-1}$.

(5-d) Finir le calcul de P^{-1}.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle : $y"(x) - 3iy'(x) + (e^{ix} - 2)y(x) = 0$ $(\mathcal{E})$, où y représente une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(1-a) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ définies sur $\mathbb{R}$ et $2\pi-$périodiques forment un $\mathbb{C}-$ espace vectoriel que l'on notera $S_{2_{pi}}$.

(1-b) Établir qu'une solution φ de l'équation $(\mathcal{E})$ est $2\pi-$ périodique si et seulement si $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ et $\varphi'(0) = \varphi'(2\pi)$

(2-a) Soit f une solution $2\pi-$ périodique de l'équation $(\mathcal{E})$. Démontrer que la série de FOURIER de f converge vers f en précisant le mode de convergence (on énoncera avec précision le théorème utilisé).

(2-b) Soit φ une solution $2\pi-$périodique de l'équation $(\mathcal{E})$ définie par $\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$.

(2-b-i) Déterminer une relation de récurrence liant c_{k-1} et c_k.

(2-b-ii) En déduire que : $\forall k \leq 1,\ c_k = 0$.

(2-b-iii) Exprimer c_k en fonction de k et de c_2, pour tout $k \geq 2$.

(3) Démontrer que l'espace vectoriel $S_{2\pi}$ n'est pas réduit à la fonction nulle et déterminer sa dimension. Toutes les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ sont-elles $2\pi-$périodiques ?

(4) On considère la solution φ obtenue en posant $c_2 = 1$ et on note φ_1 sa partie réelle et φ_2 sa partie imaginaire $(\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2)$.

(4-a) Montrer que φ_1 et φ_2 sont respectivement paire et impaire.

(4-b) Montrer que $\varphi_1(0) > 0$.

(4-c) Établir que φ_1 change de signe au moins quatre fois sur $[0, 2\pi][$ en déterminant (α, β, γ) tels que : $0 < \beta < \gamma < 2\pi$ et $\varphi_1(\alpha) < 0, \varphi_1(\beta) > 0, \varphi_1(\gamma) < 0$.

Exercice 3

On considère la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = xye^{-x-y}$.

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure usuelle de plan euclidien orienté. Pour tout $\lambda_i n\mathbb{R}$, on note Γ_λ la ligne de niveau λ de f, c'est à dire l'esemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = \lambda$.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = xe^{-x}$.

(1)

(1-a) Étudier les variations de la fonction φ et discuter suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation $\varphi(x) = \lambda$.

(1-b) Montrer que φ restreinte à $]-\infty, 0[$ définit un C^∞ difféomorphisme de $]-\infty, 0[$ sur lui même.

(2) Déterminer les extrémums de la fonction f (le cas échéant, on précisera la nature de l'extrémum obtenu : maximum ou minimum, global ou local).

(3-a) Montrer que par tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passe une ligne de niveau Γ_λ et une seule.

(3-b) Déterminer dans le cas général un vecteur tangent à Γ_λ en (x_0, y_0) et préciser les exceptions.

(3-c) Établir que toutes les courbes Γ_λ admettent un même axe de symétrie Δ que l'on précisera.

Pour tout $\lambda \neq 0$, on note Γ_λ^+ l'intersection de la courbe Γ_λ avec le demi-plan d'équation $x > 0$ et Γ_λ^- l'intersection de la courbe Γ_λ avec le demi plan d'équation $x < 0$.

On recommande de traiter la question (6) au fur et à mesure de l'avancement des question (4) et (5).

(4) Soit $\lambda > 0$.

(4-a) Déterminer une condition nécéssaire et suffisante pour Γ_λ^+ soit non vide.

(4-b) Montrer que dans ce cas, Γ_λ^+ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

(4-c) Établir que la courbe Γ_λ^- peut être caractérisée par une équation de la forme $y = g_\lambda(x)$ où g_λ est une fonction C^∞ sur $]-\infty, 0[$ dont on précisera les variations et les limites.

---

(5) Dans ce qui suit on remplace la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et on note alors (X, Y) les nouvelles coordonnées du point (x, y).

(5-a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, caractériser Γ_λ par une équation de la forme $F(X, Y) = \lambda$.

(5-b) On suppose $\lambda < 0$. Montrer que la branche Γ_λ^- de la courbe Γ_λ se caractérise par une équation de la forme $Y = G_\lambda(X)$ où G_λ est une fonction C^∞ dont on précisera les variations et les branches infinies (on utilera la fonction φ définie en (1)). Comment obtient-on l'autre branche Γ_λ^+ ?

(5-c) On suppose $\lambda > 0$. Caractériser la branche Γ_λ^+ par une équation de la forme $Y = \pm G_\lambda(X)$ où G_λ est une fonction dont on étudiera les variations à l'aide de la fonction φ définie en (1).

---

(6) Indiquer sur un graphique l'allure des diverses lignes de niveau de la fonction f.

FIN DU PROBLÈME