



Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisée

Problème

Dans tout le problème, on considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} x^n.$$

Partie I

Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$U_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}\right).$$

1. Pour tout $x \in [0, 1[$, montrer que :

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i+1}}{2i+1}.$$

2. Soit n un entier naturel strictement positif. On pose $x_n = \frac{1}{2n+1}$.

(i) Etablir les égalités :

$$v_n = \frac{1}{2x_n} \ln\left(\frac{1+x_n}{1-x_n}\right) - 1 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_n^{2i}}{2i+1}.$$

(ii) En déduire que :

$$v_n \leq \frac{x_n^2}{3(1-x_n^2)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}.$$

(iii) Justifier que :

(a) La suite $(\ln(U_n))_{n \geq 1}$ est décroissante.

(b) La suite $(\ln(U_n) - \frac{1}{12n})_{n \geq 1}$ est croissante.

3. Montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ converge vers une valeur strictement positive.

Dans la suite, on admettra que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ converge vers la valeur $\sqrt{2\pi}$. On retrouve ainsi la formule de Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$$

Partie II

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière définissant f .
2. En utilisant la formule de Stirling, montrer que la série de terme général $n^{n-1}e^{-n}/n!$ converge.
3. En déduire la convergence normale de la série définissant f sur $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$.
4. Quel est le domaine de continuité de f ?

Partie III

1. Montrer que tout entier naturel n non nul vérifie l'inégalité :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e.$$

(*indication* : On pourra montrer que $\forall x > 0, \ln(1+x) < x$.)

2. Quelle est la classe de f sur l'intervalle $]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$? Exprimer f' sous forme de série entière sur cet intervalle.
3. Montrer que f est strictement croissante sur $]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$ (*indication* : On pourra regrouper les termes deux par deux dans l'expression de f').

Partie IV

Pour tout entier naturel strictement positif N , on définit A_N et B_N en posant :

$$A_N = \sum_{n=1}^{2N} \frac{n^{n-1}}{n!} \left(\frac{-1}{e}\right)^n \quad \text{et} \quad B_N = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{n^{n-1}}{n!} \left(\frac{-1}{e}\right)^n.$$

1. Montrer que les deux suites $(A_N)_{N \geq 1}$ et $(B_N)_{N \geq 1}$ sont adjacentes.
2. Etablir un encadrement de $f\left(\frac{-1}{e}\right)$ à l'aide de A_N et de B_N , pour tout entier naturel strictement positif N .
3. Déterminer un entier naturel N tel que $A_N - B_N < 10^{-2}$.
4. En déduire une valeur approchée de $f\left(\frac{-1}{e}\right)$ à 10^{-2} près.

Partie V

Soit m un entier naturel non nul. On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} par :

$$\varphi(x) = (1 - e^x)^m.$$

1. Après avoir justifié que φ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , montrer que pour tout entier i compris entre 0 et m , il existe un polynôme P_i tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi^{(i)}(x) = P_i(e^x)(1 - e^x)^{m-i}.$$

2. En développant $\varphi(x)$, montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N} \text{ tel que } m \geq 2, \sum_{n=1}^m (-1)^n C_m^n n^{m-1} = 0.$$

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(y) = ye^{-y}$.

3. Etudier et représenter la fonction g .

4. Montrer l'existence d'un unique réel $\alpha \in]-1, 0[$ tel que $\alpha e^{-\alpha} = -\frac{1}{e}$. Montrer de plus :

$$\forall y \in [\alpha, 1], g(y) \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right].$$

5. Montrer que :

$$\forall y \in [\alpha, 1], f(ye^{-y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=n}^{\infty} (-1)^{m-n} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} y^m \right).$$

6. Soit $y \in [\alpha, -\alpha]$. On considère la suite double $(z_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{aligned} z_{n,m} &= (-1)^{m-n} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} y^m && \text{si } 1 \leq n \leq m, \\ &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Montrer que cette double suite est sommable.

7. En déduire que : $\forall y \in [\alpha, -\alpha], f(ye^{-y}) = y$.

On admettra dans ce qui suit que cette propriété est valable sur l'intervalle $[\alpha, 1]$.

8. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}\right]$.

9. Que peut-on dire de la dérivabilité de f en les points d'abscisses $\frac{-1}{e}$ et $\frac{1}{e}$? Justifier précisément votre réponse.