CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

durée 3 heures

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 1

1. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ de dimension finie $n > 0$. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

   (i) En discutant sur la dimension de $\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Ker}u$, montrer que $E = \mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u$ ou $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$.

   (ii) Soit e un vecteur non nul de $\mathrm{Im}u$. Justifier l'existence d'une base de E dont le premier vecteur est e. Dans le cas où $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$, quelle est la forme de la matrice de u sur une telle base?

   (ii) Dans le cas où $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$, montrer que $Tr(u) = 0$.

   (iii) Montrer alors l'équivalences des trois assertions :

   (a) u est diagonalisable.

   (b) $E = \mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u$.

   (c) $Tr(u) \neq 0$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note F_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ F_A(X) = Tr(AX),$$

où $Tr(AX)$ désigne la trace de la matrice AX.

   (i) Montrer que F_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (ii) On considère l'application F définie par :

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^* \\ & & A & \mapsto & F_A \end{array}$$

   Montrer que F est linéaire.

   (iii) Soit $(E_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (on rappelle que la matrice $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, excepté le (i,j)-ième qui est égal à 1). Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}$, exprimer $F_A(E_{i,j})$ en fonction des coefficients de A. En déduire que F est injective.

   (iv) Montrer que F est un isomorphisme.

3. Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit f une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application ψ_f définie par :

$$\begin{array}{rccc} \psi_f & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & & X & \mapsto & f(X)J \end{array}.$$

On remarquera que ψ_f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (i) Justifier l'existence d'une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f(X) = Tr(AX).$$

   (ii) Comparer le noyau de ψ_f et le noyau de f. Quel est l'image de ψ_f? Quel est le rang de ψ_f?

   (iii) Exprimer la trace de ψ_f en fonction de A et J.

   (iv) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A et J pour que ψ_f soit diagonalisable.

   (v) On suppose que ψ_f est diagonalisable. Déterminer le polynôme minimal de ψ_f.

Exercice 2

1. On considère la fonction f définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(\cos x) \end{array}.$$

(i). Calculer la limite quand x tend vers 0 de :

$$\frac{1}{x^2}f(x).$$

(ii). En déduire qu'il existe des réels strictement positifs α, C et C' telle que :

$$\forall x \in]-\alpha,\alpha[, \quad -Cx^2 \leqslant \ln(\cos x) \leqslant -C'x^2.$$

(iii). Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels telle que la série de terme général $(u_n)^2$ converge.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \cos u_n > 0.$$

b. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant n_0} \ln(\cos u_n)$ converge.

2. Soit β un réel dans l'intervalle $]0,\frac{\pi}{2}[$. Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, on pose $P_n = \prod_{i=0}^{n} \cos(\beta/2^i)$. On note $\mathbf{P}_\beta$ la suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$.

(i) Montrer que la suite $\mathbf{P}_\beta$ est une suite décroissante positive. En déduire qu'elle admet une limite $l_\beta \geq 0$.

(ii) Montrer en utilisant les résultats de la question 1. que $l_\beta \neq 0$.

3. Dans cette question on considère le corps de nombres complexes $\mathbb{C}$ comme un plan affine. Chaque point est caractérisé par son affixe. Soit O le point d'affixe 0. Soit Ω le cercle de centre O et de rayon 1. Pour tout entier naturel n, on pose $\theta_n = \frac{2\pi}{2^{n+2}}$ et on considère le polygone régulier Π_n inscrit dans Ω défini par ses 2^{n+2} sommets :

$$1, e^{i\theta_n}, \ldots, e^{ik\theta_n}, \ldots, e^{i(2^{n+2}-1)\theta_n}$$

(i) Représenter sur une même figure Π_0 et Π_1.

(ii) Soit A le point d'affixe 1. Soit θ dans $]0,\frac{\pi}{2}[$; soient B le point d'affixe $e^{i\theta}$ et C le point d'affixe $e^{2i\theta}$. On note M le milieu de AC.

a. Montrer que l'aire du triangle OAC vérifie la relation :

$$\text{aire}(OAC) = OM.MA = \sin\theta\cos\theta.$$

b. En déduire que les aires respectives des triangles $0AC$ et OAB vérifient la relation :

$$\text{aire}(OAC) = 2\cos\theta\,\text{aire}(OAB).$$

(iii) Soit n un entier naturel. On note B_n le point d'affixe $e^{i\theta_n}$. Exprimer l'aire du polygone Π_n en fonction de l'aire du triangle OAB_n.

(iv) En utilisant les résultats des questions (ii)et (iii), montrer que :

$$\text{aire}(\Pi_n) = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\text{aire}(\Pi_{n+1}).$$

(v) En admettant que lorsque n tend vers $+\infty$, l'aire de Π_n tend vers l'aire de Ω, montrer que :

$$l_{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\pi},$$

$l_{\frac{\pi}{4}}$ désignant la limite de la suite $\mathbf{P}_{\frac{\pi}{4}}$ définie dans la question 2.

Exercice 3

On considère le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit a un réel strictement positif. Soit I le point de coordonnées $(a, 0)$. On considère $\mathcal{C}$ le cercle de centre I passant par 0.

1. Soit M un point du plan distinct de O. On note (α, β) les coordonnées de M.

   a) Ecrire en fonction de α et β, l'équation de la droite (D_M) passant par M et othogonale au vecteur $\overrightarrow{OM}$.

   b) Calculer en fonction de a, α et β le carré de la distance du point I à la droite (D_M).

   c) Trouver une relation entre α et β nécessaire et suffisante pour que (D_M) soit tangente au cercle $\mathcal{C}$.

On note (Γ) l'ensemble des projections orthogonales de O sur les tangentes au cercle $\mathcal{C}$.

2. En déduire une équation cartésienne de (Γ). Montrer que (Γ) admet une équation polaire de la forme $r = a(1 + \cos(\theta))$.

3. Construire (Γ) dans le repère Oxy en prenant $a = 2cm$.

4. On note $(\Gamma_{2\pi/3})$ la courbe déduite de (Γ) par la rotation affine de centre O et d'angle $2\pi/3$.

   a) Tracer $(\Gamma_{2\pi/3})$ sur le même graphique que (Γ).

   b) Calculer, en fonction de a, l'aire de la portion de plan intérieure aux courbes (Γ) et $(\Gamma_{2\pi/3})$.