I54P

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé

Problème

Dans tout le problème, on désigne par E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si u est une telle suite, on note, pour tout entier naturel n, u_n son terme d'indice n. On note I l'application identité de E. On définit un endomorphisme T de E en posant:

$$\begin{array}{rcccl} T & : & E & \to & E \\ & & u & \mapsto & T(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}.$$

C'est à dire que, pour tout entier naturel n, le n-ième terme de la suite $T(u)$ vérifie : $T(u)_n = u_{n+1}$.

On considère également l'endomorphisme L de E défini par: $L = I + T$. Enfin, on rappelle que pour tout endomorphisme F de E, on définit par récurrence l'endomorphisme itéré F^k par: $F^0 = I$ et pour tout entier naturel k non nul, $F^k = F \circ F^{k-1}$.

Préliminaires

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   1a. Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

   1b. Après avoir justifié avec soin les hypothèses de son application, utiliser la formule du binôme pour calculer $L^n = (I+T)^n$.

   1c. En déduire pour $u \in E$, l'égalité :

   $$L^n(u)_0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k,$$

   où $L^n(u)_0$ désigne le terme d'indice 0 de la suite $L^n(u)$.

2. On considère la fonction f, 2π-périodique, impaire, définie par : $f(0) = f(\pi) = 0$ et $\forall t \in]0, \pi[, f(t) = 1$.

   2a. Calculer les coefficients de Fourier de f.

   2b. La série de Fourier de f converge-t'elle simplement vers f sur $\mathbb{R}$? Converge-t'elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}$?

   2c. Déduire de ce développement la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Partie I

Soit p un entier naturel $\geqslant 2$. On note Ω_p l'ensemble des suites complexes p-périodiques, c'est à dire l'ensemble des $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$.

1. 1a. Montrer que Ω_p est un sous-espace vectoriel de E.

   1b. Soit φ l'application définie par :

   $$\varphi \ : \ \Omega_p \to \mathbb{C}^p, \quad u \mapsto \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{p-1} \end{pmatrix}.$$

   Démontrer que φ est un isomorphisme. En déduire la dimension de Ω_p.

   1c. Pour $j \in \{0, 1, ..., p-1\}$, on définit la suite c^j en posant :

   $$c_n^j = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est congru à } j \text{ modulo p,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que la famille de suites $B_c = \{c_0, c_1, ..., c_{p-1}\}$ est une base de Ω_p.

2. 2a. Justifier que Ω_p est stable par les endomorphismes T et L.

Dans la suite du problème, on fixe $p \geq 2$ et on s'intéresse aux endomorphismes T et L induits sur Ω_p que l'on notera respectivement t et l.

2b. Déterminer $\ker t$. Qu'en conclure?

2c. i) Soit $u \in \ker l$. Montrer que $\varphi(u)$ vérifie le système $\mathcal{S}$:

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} u_0 & + & u_1 & & & & & = & 0 \\ & & u_1 & + & u_2 & & & = & 0 \\ & & & \ddots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & & u_{p-2} & + & u_{p-1} & = & 0 \\ u_0 & & & & & + & u_{p-1} & = & 0 \end{array} \right.$$

ii) Résoudre le système $\mathcal{S}$ en discutant selon la parité de p.

iii) Déterminer $\ker l$.

3. 3a. Montrer que $(t)^p = I$. En déduire que t est diagonalisable.

3b. Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme t sont des racines p-ièmes de 1.

On note $\omega_0 = 1, ..., \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}, ..., \omega_{p-1} = e^{\frac{2i(p-1)\pi}{p}}$ les racines p-ièmes de 1.

3c. Déterminer une base de vecteurs propres $B_\epsilon = \{\epsilon^0, \epsilon^1, ..., \epsilon^{p-1}\}$ de l'endomorphisme t telle que : $\epsilon_0^j = 1$ et ϵ^j est un vecteur propre associé à la valeur propre ω_j. Quel est l'ensemble des valeurs propres de t ?

3d. Soit P la matrice de passage de la base B_c à la base B_ϵ. Expliciter P.

3e. On note $\overline{P}$ la matrice conjuguée de P et I_p la matrice identité d'ordre p. Montrer que ${}^tP\overline{P} = pI_p$. En déduire la matrice P^{-1}, inverse de P.

4. Soit u une suite de Ω_p. En utilisant la base B_c définie en 1c, on remarque que u se décompose de la façon suivante :

$$u = \sum_{k=0}^{p-1} u_k c^k.$$

On note $x_0, ..., x_{p-1}$ les coordonnées de u dans la base B_ϵ, ce qui permet d'écrire :

$$u = \sum_{k=0}^{p-1} x_k \epsilon^k.$$

4a. Exprimer $l(u)$ puis $l^n(u)$, pour tout entier naturel n, en fonction des $x_k, \omega_k, \epsilon_k^j$.

4b. Montrer que pour $k \in \{1, ..., p-1\}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} (\frac{1 + \omega_k}{2})^n = 0.$$

4c. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}l^n(u)_0=\frac{u_0+u_1+\cdots+u_{p-1}}{p}.$$

5. En utilisant la question 1 des préliminaires , en déduire que, pour tout j dans $\{0,...,p-1\}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n-j}{p}}C_n^{pk+j}=\frac{1}{p}.$$

Partie II

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit u une suite dans E admettant une limite ℓ.

   1a. En utilisant les questions 1a. et 1c. des préliminaires, vérifier que:

$$\frac{1}{2^n}L^n(u)_0-\ell=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(u_k-\ell).$$

   1b. Soit N un entier naturel. Pour tout entier naturel $n\geqslant N$, on pose :

$$S_N(n)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}C_n^k(u_k-\ell)\ \text{ et }\ T_N(n)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}C_n^k(u_k-\ell).$$

   (i). Montrer que :

$$|T_N(n)|\leqslant\sup\{|u_k-\ell|;k\in\{N+1,...,n\}\}.$$

   (ii). On pose $P_N(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{x^k}{k!}$ pour $x\in\mathbb{C}$. Montrer que :

$$|S_N(n)|\leqslant\frac{1}{2^n}P_N(n)\sup\{|u_k-\ell|;k\in\{0,...,N\}\}.$$

   (iii). Justifier que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}P_N(n)=0.$$

   1c. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}L^n(u)_0=\ell.$$

2. Soit $u\in E$. On définit une suite s par : $s_0=0$ et $s_n=\sum_{k=0}^{n-1}u_k$, pour un entier naturel $n\geqslant1$. On définit également une suite S par $S_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^ks_k$, pour tout entier naturel n.

2a. Montrer les égalités ci dessous, pour tout entier naturel n.

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k s_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_{k+1}.$$

2b. En déduire, pour tout entier naturel n, que :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2^{n+1}} L^n(u)_0;$$

On utilisera la question 1c. des préliminaires.

2c. On suppose que u_n est le terme général d'une série convergente. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} L^n(u)_0$ est une série convergente et établir l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} L^n(u)_0.$$

Partie III : Application.

On considère les suites u et J définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ et } J_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$$

1. Pour tout entier naturel n, montrer que $J_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$J_n = \frac{2n}{2n+1} J_{n-1}.$$

En déduire que :

$$J_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

3. En utilisant II2c, conclure que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{\pi}{4}.$$

4. a. Déterminer le plus petit entier N_1, tel que :

$$\left|\sum_{k=0}^{N_1} \frac{2^{n-1}(n!)^2}{(2n+1)!} - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant 0.025.$$

b. Déterminer le plus petit entier N_2 tel que :

$$\left|\sum_{k=0}^{N_2} \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant 0.025.$$

c. Comparer N_1 et N_2, puis conclure.