T30W

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

durée 3 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une suite de réels $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ telle que : $x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{n+1}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Soit φ l'application définie par :

$$\varphi \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} P(x_i)\, Q(x_i) \end{array}$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On définit la suite $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \ldots, n\}, & P_k = \displaystyle\prod_{j=k+1}^{n+1} (x_j - X) \\ & P_{n+1} = 1 \,. \end{cases}$$

(a) Montrer que la famille $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Montrer que la base orthonormée $\mathcal{B}'$, déduite par le procédé de Schmidt de la base $\mathcal{B}$, est la base $(L_1, L_2, \dots, L_{n+1})$ où L_i est le i^{ime} polynôme de Lagrange défini par

$$L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

3. (a) Déterminer les coordonnées du polynôme X^k pour $k \in (0, \dots, n)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

(b) On se propose de calculer $\det_{\mathcal{B}'}(1, X, \dots, X^n)$.

i. En utilisant des opérations élémentaires, montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^{n+1} (x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

ii. Calculer $\det_{\mathcal{B}'}(1, X, \dots, X^n)$.

(c) Montrer que $|\det_{\mathcal{C}}(1, X, \dots, X^n)|$ est indépendant de la base orthonormée $\mathcal{C}$ choisie.

(d) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que la matrice des coordonnées des vecteurs $(1, X, \dots, X^n)$ dans la base $\mathcal{D}$ soit triangulaire.

(e) En déduire que :

$$\left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i) \right)^2 \leqslant \prod_{p=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^{2p} \right).$$

Exercice 2

Le plan affine est rapporté au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation polaire $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$.

(a) Etudier et tracer la courbe $\mathcal{P}$.

(b) Montrer que $\mathcal{P}$ est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques (foyer et directrice).

2. A tout point M de $\mathcal{P}$ on associe le point K projeté orthogonal de M sur l'axe $(O, \overrightarrow{i})$. On appelle N le symétrique de O par rapport à K et H le projeté orthogonal du point O sur la droite (MN) . On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points H.

   (a) Déterminer, en fonction de θ, les coordonnées du point H dans le repère $\mathcal{R}$.

   (b) Lorsque H est distinct de O, on pose φ une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OH}}\right)$ modulo 2π. Calculer $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ en fonction de θ.

   (c) Montrer que l'équation polaire de l'ensemble $\mathcal{E}$ dans le repère $\mathcal{R}$ est $r(\varphi) = \dfrac{\sin 2\varphi}{1 - \sin\varphi}$.

3. Etudier la courbe $\mathcal{E}$ d'équation polaire $r(\varphi) = \dfrac{\sin 2\varphi}{1 - \sin\varphi}$ dans le repère $\mathcal{R}$ .On étudiera en particulier , le signe de $r(\varphi)$, les branches infinies , les points stationnaires s'ils existent .

4. Tracer l'ensemble $\mathcal{E}$ sur le même graphique que $\mathcal{P}$.

Exercice 3

Soit M une matrice carrée d'ordre $2n$ à coefficients complexes définie par blocs par $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où A, B, C sont trois matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On suppose que la matrice M est diagonalisable et que $AC = CB$.

1. (a) Montrer que pour tout polynôme P à coefficients complexes, il existe une matrice D carrée d'ordre n telle que $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & D \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer qu'il existe un polynôme P à coefficients complexes scindé à racines simples vérifiant $\begin{cases} P(A) = 0 \\ P(B) = 0 \end{cases}$.

   (c) En déduire que les matrices A et B sont diagonalisables.

2. Soit N la matrice carrée d'ordre $2n$ à coefficients complexes définie par blocs par $N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $MN = NM$.

(b) En déduire qu'il existe une matrice R inversible et deux matrices diagonales D et D' telles que :
$M = R^{-1}DR$ et $N = R^{-1}D'R$.

(c) En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

3. Montrer que la matrice C est nulle .