10MP02

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1

On s'intéresse à l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) \qquad y' - y = \frac{-1}{\mathrm{e}} \cdot \frac{1}{1+x}$$

1. Soit $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$. On note S sa somme.

a. Rappeler le développement en série entière de la fonction :

$$\begin{array}{rccl} u : &]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{-1}{\mathrm{e}} \cdot \dfrac{1}{1+x} \end{array}$$

et préciser sur quel intervalle ce développement est valable.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients a_n pour que la somme S soit solution de (E) sur $]-1,1[$.

c. On suppose la condition précédente satisfaite, démontrer qu'alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = \frac{a_0}{n!} - \frac{1}{en!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k!$$

d. Démontrer que la suite (a_n) est bornée et justifier la relation $R \geq 1$.

2. Démontrer que pour $x > -1$, la fonction :

$$F : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On définit une fonction f sur $]-1, +\infty[$ en posant :

$$\forall x > -1,\ f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

3. Démontrer que f admet un développement en série entière en 0 de la forme :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

et expliciter les coefficients b_n à l'aide des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^p}\,\mathrm{d}t$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

4. Démontrer que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et calculer $f'(x) - f(x)$ pour $x > -1$.

5. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k!$ à l'aide des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^p}\,dt$.

Exercice 2

On étudie dans cet exercice des équations de la forme :

$$(\mathcal{E}_{p,q}) : \qquad M^2 + pM + qI_n = 0$$

où l'inconnue M est une matrice carrée de taille n à coefficients réels ($M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), p et q sont deux paramètres réels et I_n désigne la matrice identité de taille n.

1. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

$$E(M) = \{PMP^{-1},\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$$

Démontrer que si M est solution de l'équation $(\mathcal{E}_{p,q})$ alors toute matrice $M' \in E(M)$ est également solution.

Dans la suite, les ensembles de solutions des équations $(\mathcal{E}_{p,q})$ pourront être écrits sous la forme d'une réunion d'ensembles $E(A)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$:

$$M^2 - (a+b)M + abI_n = 0$$

avec a et b deux réels distincts.

a. Démontrer que toute solution M de l'équation est diagonalisable (on énoncera complètement le théorème utilisé).

b. Déterminer les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$.

3. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{0,0})$ (c'est à dire l'équation $M^2 = 0$).

a. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M. Démontrer que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$.

b. Énoncer précisément le théorème du rang.

c. Démontrer que $\mathrm{rg} f \leq \frac{n}{2}$.

d. On pose $p = \mathrm{rg} f$. Démontrer qu'il existe $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right)$$

e. En déduire les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{0,0})$.

4. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$:

$$M^2 - 2aM + a^2 I_n = 0$$

avec a un réel.

a. Démontrer que toute solution M peut s'écrire $M = N + aI_n$ avec $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N^2 = 0$.

b. En déduire les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$.

5. Démontrer que si n est impair, l'équation $M^2 + I_n = 0$ n'a pas de solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. On considère l'équation $(\mathcal{E}_{0,1})$ (c'est à dire l'équation $M^2 + I_n = 0$). On suppose que n est pair et on note $n = 2p$.

a. Démontrer que la matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

b. Démontrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}MP = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right)$$

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{0,1})$.

Exercice 3

Soit n un entier, $n \geq 1$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Pour $P, Q \in E$, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad f(P) = ((X^2-1)P')'$$

1. Démontrer que φ définit un produit scalaire sur E.

On considère dans la suite l'espace euclidien E associé au produit scalaire φ. La norme euclidienne de $P \in E$ est notée $\|P\|$.

2. Démontrer que f est un endomorphisme de E.

3. Rappeler les définitions de l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien et d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.

4. Démontrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

5. Déterminer $\ker f$ et en déduire le rang de f.

6. On suppose, dans cette question seulement, que $n = 2$ et on définit le polynôme $P_0 = 1+X$.

a. Déterminer le projeté orthogonal de P_0 sur $\mathrm{Im} f$.

b. Déterminer $m = \inf\limits_{P \in \mathbb{R}_2[X]} \|P_0 - f(P)\|$.

c. Résoudre l'équation $\|P_0 - f(P)\| = m$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

7. On définit une suite $(L_k)_{k \geq 0}$ de polynômes en posant $L_0 = 1$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ L_k = \left((X^2-1)^k\right)^{(k)}$$

(c'est à dire : L_k est la dérivée k-ième de $(X^2-1)^k$).

a. Calculer les polynômes L_1, L_2 et L_3.

b. Déterminer le degré de L_k.

c. À l'aide de la formule de Leibniz, exprimer les polynômes :

$$A_k = ((X^2-1)(X^2-1)^k)^{(k+2)}$$
$$B_k = (X(X^2-1)^k)^{(k+1)}$$

à l'aide des polynômes L_k, L'_k et L''_k.

d. Démontrer que pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$(X^2-1)L''_k + 2XL'_k - k(k+1)L_k = 0$$

e. À l'aide de la relation précédente, démontrer que L_k est un vecteur propre de f (on précisera la valeur propre associée).

f. Démontrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base orthogonale de E.

FIN DE L'EPREUVE