e3a concours

Concours ESTP - ENSAM - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de MATHEMATIQUES 2

Filière PC

durée 3 heures

Nota: les cinq sujets sont indépendants et peuvent être traités, à la rigueur, dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très distinctement *leur numéro. Leur 5ème question est, en général, la plus difficile.*
Dans la rédaction des copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer *chacun des résultats correspondants aux éléments* encadrés *dans les énoncés.*

SUJET 1 Soit $f(x) = \exp(-\sqrt{x})$, x réel >0 . La dérivée $n^{\text{ème}}$ de f est notée $f^{(n)}(x)$, ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$, ou $D^n f$.

1. Dresser un tableau de variations de f, et dessiner sa courbe représentative .

2. On pose $c_n = \dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}$. Calculer c_1 et c_2 .

3. Établir que $y = f(x)$ obéit à l'équation différentielle $4xy'' + 2y' - y = 0$.

Préciser des fractions rationnelles $\boxed{\varphi(n)}$ et $\boxed{\psi(n)}$, telles que $c_{n+2} = \varphi(n)c_{n+1} + \psi(n)\, c_n$.

4. Démontrer que $|c_n| \leq 1$. Qu'en déduit-on pour le rayon de convergence R de la série $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$?

5. Prouver que $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} c_n (x-1)^n$ sur un intervalle J ouvert que l'on précisera.

SUJET 2 On s'intéresse à la série de terme général $u_n = \dfrac{j^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$, où $j = \exp(2i\dfrac{\pi}{3})$ est racine cubique de l'unité. On introduit $v_n = u_{3n-2} + u_{3n-1} + u_{3n}$, et les sommes partielles $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ et $V_p = \sum\limits_{\ell=1}^{p} v_\ell$.

1. Montrer que $|v_n| \sim C.n^{-3/2}$ où $\boxed{C}$ est une constante à déterminer.

2. Montrer que l'une des deux suites (U_n) et (V_p) est "***extraite***" de l'autre. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

3. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer l'intégrale impropre $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt$.

4. Établir que le reste $R_n = \sum\limits_{q=n+1}^{+\infty} u_q$ vaut $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(je^{-t})^{n+1} dt}{\sqrt{t}(1-je^{-t})}$. [On peut exprimer u_q au moyen de a_q .]

5. En déduire que $|R_n| \sim D.|u_n|$ où $\boxed{D}$ est une constante à déterminer.

SUJET 3

Soit f la fonction de la variable réelle x telle que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

$\boxed{1}$ Préciser l'ensemble de définition $\boxed{\mathscr{E}}$ de f.

$\boxed{2}$ Montrer que cette fonction est ***strictement*** décroissante .

$\boxed{3}$ Déterminer la limite de f pour x tendant vers $+\infty$.

$\boxed{4}$ Prouver que $f(x) \sim \dfrac{2}{x^2}$ pour x tendant vers 0 . [On peut comparer f à une intégrale.]

$\boxed{5}$ Soit $J = \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Démontrer que J ***existe*** et que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

SUJET 4

On définit f, fonction ***paire*** de période 2π, par $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \in [0;\pi]$.

$\boxed{1}$ Cette fonction est-elle C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$?

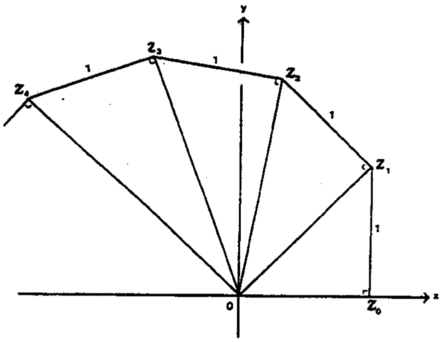
$\boxed{2}$ On cherche la série de Fourier de f, soit $a_0 + \sum_{n\geq 1} \big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big)$. Calculer $\boxed{a_0}$ et $\boxed{b_n}$.

$\boxed{3}$ On pose $G(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$. Établir que $G(x) = \dfrac{1-\cos(x^2)}{2x} + \int_0^x \dfrac{1-\cos(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t$. En déduire l'existence de $L = \lim_{+\infty} G(x)$. On admettra que $L = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$\boxed{4}$ Déterminer alors une constante $\boxed{D}$ telle que $a_n \sim D.n^{-3/2}$.

$\boxed{5}$ Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

SUJET 5



Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on définit la suite de points (z_n) de la façon suivante : $z_0 = 1$, et le triangle Oz_nz_{n+1} , ***rectangle*** en z_n , est orienté dans le ***sens direct***, avec $|z_{n+1} - z_n| = 1$ [figure ci-contre]. La réunion des segments $[z_n, z_{n+1}]$ constitue donc une ligne polygonale infinie L de forme spirale.

$\boxed{1}$ Calculer $\boxed{|z_n|}$.

$\boxed{2}$ Montrer que le nombre réel $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Arctan}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ est un argument possible pour le nombre complexe z_n , $n \geq 1$.

$\boxed{3}$ Déterminer la ***nature*** de la série de terme général $u_n = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} - \mathrm{Arctan}\left(n^{-1/2}\right)$.

$\boxed{4}$ Établir l'***existence*** d'une constante réelle C , telle que $\alpha_n = 2\sqrt{n} - C + O(n^{-1/2})$.

$\boxed{5}$ Montrer que cette constante C est ***strictement positive***.