MATHÉMATIQUES

Exercice 1

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in ¥}$ définies sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_0(x) = 0 \text{et } \forall n \in ¥,\ \forall x \in [0,+\infty[,\ f_{n+1}(x) = f_n(x)+\frac{1}{2}\left(e^{-2x}-f_n^{\,2}(x) \right).$$

ø1 (**a**) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$e^{-x}-f_{n+1}(x) = \left(e^{-x}-f_n(x) \right)\phi(x), \text{où } \phi(x) = 1-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}f_n(x).$$

(**b**) Prouver que pour tous $n \in ¥$, $x \in [0,+\infty[$: $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$. En déduire que la suite (f_n) est croissante et convergente. Préciser sa limite.

ø2 Soit $a \in]0,+\infty[$.

(**a**) Montrer qu'il existe $k_a \in]0,1[$ tel que :

$$\forall x \in [0,a],\ e^{-x}-f_{n+1}(x) \leq k_a \left(e^{-x}-f_n(x) \right).$$

(**b**) En déduire la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0,a]$ pour tout $a \in$ ¡$_+^*$.

ø3 On pose $u_n = 1-f_n(0)$.

(**a**) Montrer que, pour tout $n \in$ ¥, $u_n = 2^{1-2^n}$.

(**b**) Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

Exercice 2

On désigne par *F* l'espace vectoriel des fonctions définies sur $[0,+\infty[$, de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$.

On appelle *E* l'ensemble des fonctions $f \in F$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(P_1) : $f(0) = 0$

(P_2) : $\forall n \in$ ¥, $\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) \in$ ¡ [rappel : $f^{(0)}(x) = f(x)$]

On note ϕ l'application définie sur *E* par :

$\forall f \in$ *E*, $\forall x \in [0,+\infty[$, $\phi(f)(x) = f'(x) - f'(0)$.

ø1 Montrer que *E* est un espace vectoriel sur ¡ .

ø2 (**a**) Montrer que ϕ est un endomorphisme de *E*.

(**b**) Prouver que ϕ est injective.

ø3 On définit sur $[0,+\infty[$ l'application g par :

$$g : x \to (x+1)\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) - \frac{\pi}{2}x.$$

(**a**) Calculer $g'(x)$. Montrer que, pour tout n $\in$ ¥\{0,1}, il existe deux fonctions polynomiales P_n et Q_n telles que :

$$g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right)+Q_n\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right).$$

En déduire que $g' \in E$.

(**b**) Déterminer l'ensemble des fonctions f de F vérifiant :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\quad f'(x)-f'(0) = g'(x).$$

En déduire que ϕ n'est pas surjective.

ø4 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.

Exercice 3

On considère la fonction f définie de ¡ ^{2} dans ¡ par :

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{x} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 1.$$

ø1 (**a**) Étudier la continuité de f.

(**b**) Étudier l'existence des dérivées partielles de f au point (0,0).

(**c**) Déterminer et tracer la ligne de niveau 1 de f.

ø2 On définit la fonction g sur R par :

$g : x \rightarrow f(x,0) - 1$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

(**a**) Dresser avec précision le tableau de variations de la fonction g.

(**b**) En déduire que la fonction f n'admet pas d'extremum en (0,0) (justifier soigneusement la réponse).

ø3 Déterminer les points critiques de la fonction f.

ø4 (**a**) Vérifier que, pour tout $x \geq 0$, $f(x,y) \geq g(x)$.

En déduire que f admet un minimum en $(1/e,\ 0)$.

(**b**) La fonction f admet-elle un extremum en $(-1/e,\ 0)$?

ø5 Montrer que, pour tout $x \in$ ¡ *, les deux expressions :

$$\left(f(x,1)-f(0,1) \right) \text{et} \left(f(x,-1)-f(0,-1) \right)$$

sont du signe de x.

Que peut-on en conclure?