MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Pour tous réel $x > 0$ et entier n\mathrel > 3, on pose : $f_n(x) = x-n.\ln(x)$, o— le symbole ln désigne le logarithme népérien.

ø1 Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle ouvert]0,2[. On appellera désormais a_n cette solution.

ø2 Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante [on pourra comparer $f_n(a_n)$ et $f_n(a_{n-1})$].

ø3 Montrer que cette suite (a_n) tend vers 1.

ø4 Soit Φ la fonction telle que $\Phi(t) = [(\ln(1+t))/(1+t)]$, avec t réel strictement supérieur à -1. Démontrer que Φ admet, en $t = 0$, un développement limité à tout ordre k, soit $\Phi(t) = \sum_{j=1}^{k} b_j t^j + o(t^k)$.

ø5 Étudier la nature de la suite $|b_j|$.

ø6 Montrer que, sur l'intervalle $]-1,e-1[$, la fonction Φ admet une fonction réciproque Ψ dont on donnera le tableau de variations.

ø7 Montrer que Ψ admet, en $u = 0$, un développement limité à tout ordre k, soit $t = \Psi(u) = \sum_{j=1}^{k} c_j u^j + o(u^k)$.

ø8 Donner pour a_n un développement limité d'ordre 2 vis-à-vis de l'infiniment petit ${}^1/_n$, soit $a_n = A + {}^B/_n + [C/(n^2)] + o([1/(n^2)])$, o— l'on précisera les constantes A, B et C.

ø9 Prouver que les coefficients c_j sont tous strictement positifs [on pourra utiliser une équation différentielle du premier ordre reliant $\Psi(u)$ et $[d/du]\,\Psi(u)$ afin d'exprimer c_k en fonction des c_j d'indices $j < k$].

Exercice 2

Pour tout x réel dans l'intervalle ouvert $I =]-[(\pi)/2],\ [(\pi)/2][$, on pose : $f(x) = [1/\cos(x)]$\cdotp La dérivée d'ordre n de f en x est ici notée $f^{(n)}(x)$, avec la convention $f^{(0)}(x) = f(x)$.

ø1 (**a**) Prouver l'existence et l'unicité d'un polynôme P_n tel que : $f^{(n)}(x) = [(P_n(\sin(x)))/((\cos(x))^{n+1})]$\cdotp

(**b**) Donner une relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.

(**c**) Préciser P_0, P_1 et P_2.

(**d**) Déterminer le monôme de plus haut degré de P_n.

(**e**) Examiner la parité du polynôme P_n.

ø2 (**a**) Montrer que les coefficients du polynôme P_n sont des entiers positifs ou nuls.

(**b**) Que vaut $P_n(1)$?

ø3 On pose $a_n = [1/n!]\, f^{(n)}(0)$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$. Pour tout $x \in I$, justifier la formule :

$$f(x) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}\left(x\,(1-u) \right) du.$$

ø4 Prouver que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à [(π)/2]\cdotp

ø5 (**a**) Pour tous 0\mathrel6x < y < [(π)/2],   prouver que : 0\mathrel6$R_n(x)$\mathrel6$({}^{x}/_{y})^{n+1} R_n(y)$.

(**b**) Prouver également que : 0\mathrel6$R_n(x)$\mathrel6$({}^{x}/_{y})^{n+1} f(y)$.

ø6 En déduire que, pour tout x ∈ I, on a : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$.

ø7 (**a**) Démontrer que la suite (a_{2k}) tend vers 0.

(**b**) Pour tout ε ∈]0,[(π)/2][,   montrer l'existence d'une constante $M_\varepsilon > 0$ telle que :

$$0\text{\mathrel6}a_{2k}\text{\mathrel6}M_\varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right)^{-2k}.$$

(**c**) Montrer que la suite $(a_{2k} 2^k)$ est bornée.

(**d**) On donne la formule suivante : a_{2k} = [(2^{2k+2})/(π^{2k+1})] $\sum_{n=0}^{+\infty}$[(($(-1)^n$)/(($(2n+1)^{2k+1}$)]\cdotp Démontrer les relations [1/(3^k)]\mathrel6a_{2k}\mathrel6[1/(2^k)] [on pourra éventuellement s'aider d'une calculatrice].

Exercice 3

On note R[X] l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $R_k[X]$ le sous-ensemble de R[X] constitué des polynômes nuls ou dont le degré est inférieur ou égal à k. Le coefficient binômial [n!/(k! (n–k)!)] sera noté ([n || k]), ou bien C_n^k, au choix. On suppose n entier supérieur ou égal à 1 dans toute la suite.

ø1 (**a**) Montrer l'existence de polynômes f_n et g_n dans $R_{n-1}[X]$, tels que :

$$(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1,$$

ceci par développement de $((1-X)+X)^{2n-1}$, ou autrement [NB : on ne demande pas de calculer leurs coefficients].

(**b**) Préciser les polynômes f_1, f_2 et f_3.

ø2 Déterminer en fonction de f_n et de g_n tous les couples (A,B) de polynômes de R[X] tels que $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$. Démontrer l'unicité de f_n et de g_n.

ø3 (**a**) Montrer que $f_n(1-X) = g_n(X)$.

(**b**) Calculer $f_n(0)$, $f_n(1)$ et $f_n({}^{1}/_{2})$\cdotp ø4 (**a**) Dans tout ce qui suit, x désigne une variable réelle. Pour x tendant vers 0, démontrer la formule asymptotique suivante : $f_n(x) = (1-x)^{-n} + o(x^{n-1})$.

(**b**) En déduire les coefficients du polynôme f_n.

(**c**) L'équation $f_n(x) = 0$ peut-elle avoir une racine positive ou nulle ?

ø5 (**a**) Établir, pour tout x réel, la relation $n f_n(x) - (1-x) f_n'(x) = n ([(2n-1) || n]) x^{n-1}$.

(**b**) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ ne peut pas avoir deux racines réelles strictement négatives.

ø6 Pour tout x réel, on pose : $h_n(x) = \int_0^x t^{n-1}(1-t)^{n-1}\,dt$. Suivant la parité de n, donner le tableau des variations de la fonction h_n.

ø7 (**a**) Démontrer que, pour tout $x \neq 1$, on a : $f_n(x) = [(1-n ([(2n-1) || n]) h_n(x))/((1-x)^n)]$\cdotp

(**b**) Ce résultat est-il en accord avec la valeur de $f_n(1)$ trouvée plus haut ?

ø8 Discuter selon n le nombre de racines de l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]-\infty,0[$.

ø9 Prouver que les racines de $f_n(z) = 0$, z ∈ £, sont de modules strictement inférieurs à 1.
