D80S

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

durée 3 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et l'espace vectoriel complexe $E = \mathbb{C}^n$, muni de la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1°) a) Montrer que si u est diagonalisable, alors $u^2 = u \circ u$ est aussi diagonalisable.

b) Que pensez-vous de la réciproque en général si $n \geq 2$? Pour répondre à cette question, on pourra considérer u tel que $u(e_1) = e_2$, et $u(e_2) = \cdots = u(e_n) = 0$.

2°) On suppose dans cette question que u est bijectif.

a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, on a :

$$\ker(u^2 - \alpha^2 \mathrm{id}_E) = \ker(u - \alpha \mathrm{id}_E) \oplus \ker(u + \alpha \mathrm{id}_E).$$

Indication : On pourra écrire $x \in \ker(u^2 - \alpha^2 \mathrm{id}_E)$ sous la forme
$x = \frac{1}{2\alpha}[(u(x) + \alpha x) - (u(x) - \alpha x)]$.

b) Montrer que si μ est une valeur propre de u, alors μ^2 est une valeur propre de u^2.

c) Montrer que si u^2 est diagonalisable, alors E est somme directe de sous-espaces propres de u, et en déduire que u est diagonalisable.

3°) Soit

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^3$, de matrice U relativement à la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ de E.

a) Calculer la matrice U^2.

b) Calculer le rang de u.

c) Montrer que u^2 est diagonalisable et en donner les éléments propres.

d) Étudier si u est diagonalisable.

Exercice II

Le plan affine euclidien est assimilé à $E = \mathbb{R}^2$, muni de son produit scalaire canonique noté $\langle .,. \rangle$ et de la norme euclidienne associée notée $||.||$. La base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est alors une base orthonormale directe de E.

Pour tout réel θ, on note :

$$\begin{cases} u_\theta &= (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \\ \rho(\theta) &= 1 + 2\cos(3\theta) \\ M(\theta) &= \rho(\theta)u_\theta \end{cases}$$

Soit enfin $\Gamma = \{M(\theta) \; ; \; \theta \in \mathbb{R}\}$.

1°) On se propose dans cette question de représenter la courbe Γ' d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 + 2\cos(3\theta)$ avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

a) Déterminer les valeurs de θ dans $[0, \frac{\pi}{3}]$ pour lesquelles $\rho(\theta) = 0$.

b) Calculer la dérivée ρ' de ρ et déterminer les valeurs de θ dans $[0, \frac{\pi}{3}]$ pour lesquelles $\rho'(\theta) = 0$.

c) Expliciter les tangentes à Γ' aux points $M(0)$, $M(\frac{2\pi}{9})$ et $M(\frac{\pi}{3})$.

d) Représenter Γ'. On fera apparaître sur le dessin les tangentes aux points $M(0)$, $M(\frac{2\pi}{9})$ et $M(\frac{\pi}{3})$.

2°) On se propose dans cette question de déduire la représentation de la courbe Γ de celle de la courbe Γ'. On note σ la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $\theta = \frac{\pi}{3}$ et τ la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer l'image par σ du point $M(\theta)$. En déduire l'équivalence

$$M(\theta) \in \Gamma \Leftrightarrow \sigma(M(\theta)) \in \Gamma.$$

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer l'image par τ du point $M(\theta)$. En déduire l'équivalence

$$M(\theta) \in \Gamma \Leftrightarrow \tau(M(\theta)) \in \Gamma.$$

c) Représenter Γ : On utilisera σ pour représenter $\{M(\theta)\ ;\ \theta \in [0, 2\pi/3]\}$ et τ et τ^{-1} pour conclure.

3°) Soit $G = \{f \in O(E) / f(\Gamma) = \Gamma\}$, où l'on a noté $O(E)$ le groupe des transformations orthogonales de E.

a) On note D le cercle centré en l'origine de rayon 3. Expliciter $D \cap \Gamma$.

b)Soit $f \in G$. Montrer que $f(M(0))$ est un élément de $D \cap \Gamma$.

c) Soit f une rotation dans G. En distinguant selon la valeur de $f(M(0))$, déterminer l'angle de f. Quelles sont les rotations de G ?

d) Quelles sont, dans G, les symétries orthogonales par rapport à une droite ?

e) Décrire tous les éléments de G. Quel est le cardinal de G ?

Exercice III

Soit f l'application définie sur $]-1, 1[$ par $f(0) = 1$, et pour $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$, $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$.

1°) a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1, 1[$.

b) Montrer que f est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle :

$$(x+1)[xy' - y] + y^2 = 0.$$

c) Pour tout x dans $]-1, 0[$, démontrer que : $0 \leq f(x) \leq 1$.

2°) Soit $g(x) = \int_0^1 (1+x)^t \, dt$ pour $x \in]-1, 1[$.

a) Montrer que g est de classe C^1 sur $]-1, 1[$, et donner une relation entre f et g.

b) Pour tout $t \in [0, 1]$, donner le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^t$ sur $]-1, 1[$.

c) Montrer que g est développable en série entière sur $]-1,1[$. On précisera bien le théorème du cours utilisé. On écrira ce développement sous la forme $g(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, en exprimant a_k sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer en général.

d) Calculer a_0, a_1, a_2.

e) Exprimer, selon la parité de l'entier naturel $k \geq 1$, le signe de a_k.

f) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} |a_k| x^k \leq 1$. Pour cela, on pourra considérer $g(-x)$ et utiliser le résultat de la question 1°)c).

g) En déduire la convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$.

3°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(n-2)a_{n-1} + (n-1)a_n + \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 0.$$

b) En considérant $\ln(1+x)g(x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ on a aussi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \frac{a_k}{n-k} = 0.$$

c) Trouver ainsi la valeur de a_3 en utilisant 2°) d).

4°) Justifier les égalités : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} = \int_0^1 \frac{2^{1+t}-1}{t+1}\,dt.$