CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1

1) Calculs préliminaires

   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x) \; .$$

   b) Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \; f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

      i) Montrer que la fonction f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$; on notera φ ce prolongement.

      ii) Montrer que φ admet un développement en série entière autour de 0.

      iii) Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) On pose

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx,$$

   a) Montrer que I existe.

   b) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ on pose :

$$I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx,$$

      i) Montrer, et justifier leur convergence, que

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2} dx = 3 \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$$

      ii) Montrer qu'il existe deux constantes C et D que l'on déterminera telle que :

$$I(a) = C \int_a^{3a} \varphi(x) dx + D$$

      la fonction φ ayant été définie en 1)b)i).

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

iii) En déduire la valeur de I.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie 3 rapporté à la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$; les coordonnées d'un vecteur dans cette base sont notées (x, y, z).
L'identité sur E, notée Id_E est l'application de E dans E définie par : $\forall x \in E,\ Id_E(x) = x$.
f est un endomorphisme de E et A est sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
${}^tA$ est la matrice transposée de la matrice A.
$\mathcal{L}(E)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de E.
$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices à une colonne et 3 lignes à coefficients réels.

Préliminaires

1) Pourquoi la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de E et la base canonique (1) de $\mathbb{R}$ de la forme linéaire :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ xe_1 + ye_2 + ze_3 & \longmapsto & ax + by + cz \end{array}$$

est la matrice ligne $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$?

2) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E :
   a) Montrer que $\varphi \circ f$ est une forme linéaire sur E et que Ker φ est stable par f si et seulement si Ker $\varphi \subset$ Ker $(\varphi \circ f)$.
   b) Montrer que Ker φ est stable par f si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$
   c) Montrer que Ker φ est stable par f si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $L.A = \lambda L$, où L est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la forme linéaire φ.
3) Il existe un plan de E stable par f si et seulement si il existe une matrice colonne non nulle C, $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et un scalaire λ tel que ${}^tA.C = \lambda C$.

Exemple numérique

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -5 & 8 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

4) Recherche des sous-espaces-vectoriels de E stables par f :
   a) Montrer que 2 et 4 sont valeurs propres de A, puis déterminer les sous-espaces propres de A, de ${}^tA$.
   b) Quelles sont les droites vectorielles de E stables par f ?
   c) Déterminer les plans vectoriels de E stables par f ; on en donnera une équation cartésienne, ainsi qu'une base.
5) Etude de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / g \circ f = f \circ g\}$:
   a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de E dans laquelle la matrice de f est la matrice $A' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Reconnaître le sous espace vectoriel de E engendré par (e'_1, e'_2).
   b) Montrer que si f et g commutent alors $Ker(f - 2Id_E)$ et $Ker(f - 4Id_E)$ sont stables par g.
   c) Montrer que f et g commutent si et seulement si il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$M_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

.

d) En déduire que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension trois et que

$$\mathcal{C}(f) = Vect\{Id_E, f, f^2\}$$

.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$,les coordonnées d'un point quelconque M du plan sont notées (x, y) ; le point A est le point de coordonnées $(3, 0)$ et le point B est le point de coordonnées $(0, 2)$; m est un paramètre réel et la courbe $\mathcal{C}_m$ est la conique d'équation, dans ce repère :

$$4x^2 + 9y^2 + 2(m-6)xy - 24x - 36y + 36 = 0$$

1) Etude d'un exemple : $m = 6$. Montrer que $\mathcal{C}_6$ est une ellipse dont on donnera le centre, les sommets, les tangentes aux sommets et les axes. Tracer la courbe $\mathcal{C}_6$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

2) a) Montrer que toutes les coniques $\mathcal{C}_m$, obtenues lorsque m parcourt $\mathbb{R}$, passent par les points A et B et que ce sont leurs seuls points communs.

   b) Déterminer la tangente à $\mathcal{C}_m$ en A ainsi qu'en B . Etudier le cas particulier $m = 12$.

3) a) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur m la conique $\mathcal{C}_m$ est-elle du type ellipse ? Cette ellipse peut-elle être dégénérée ? peut-elle être un cercle ?

   b) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur m la conique $\mathcal{C}_m$ est-elle du type hyperbole ?

   c) Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles la conique $\mathcal{C}_m$ est une parabole éventuellement dégénérée ?

4) Soit $\mathcal{P}$ la courbe paramétrée par $\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 3t^2 \\ y(t) & = & 2(1-t)^2 \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}$

   a) Montrer que $\mathcal{P}$ admet une unique direction asymptotique d'équation, $2x - 3y = 0$, puis que $\mathcal{P}$ est une parabole obtenue à la question 3°)c). Donner la direction de son axe.

   b) Quels sont les coordonnées du point de la parabole $\mathcal{P}$ en lequel la tangente est perpendiculaire à l'axe ? Donner les coordonnées du sommet S de la parabole $\mathcal{P}$. Tracer $\mathcal{P}$.

   c) Soit le réel t_0, $(t_0 \neq 0,\ t_0 \neq 1)$, et le point M de paramètre t_0 de la parabole $\mathcal{P}$. La tangente en M à $\mathcal{P}$ coupe l'axe $x'Ox$ en Q et l'axe $y'Oy$ en R . Les perpendiculaires à l'axe $x'Ox$ en Q et à l'axe $y'Oy$ en R se coupent en N. Quel est l'ensemble des points N lorsque t_0 parcourt $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$?

   d) En admettant que la directrice de la parabole est l'ensemble des points par lesquels passent deux tangentes à la parabole perpendiculaires entre elles, montrer que la directrice de la parabole $\mathcal{P}$ passe par le point O et déterminer les coordonnées du foyer F. Que remarque-t-on ?

FIN DE L'EPREUVE