

On désigne par \mathbb{R} le corps des réels et par \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels.
 a et b désignent deux réels tels que $a < b$. On pose $\Omega = [a, b]^2 \subset \mathbb{R}^2$.

On désigne par $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

On désigne par $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur Ω , à valeurs réelles.

On admet que tout élément K de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ est borné sur Ω .

Pour toute fonction f , élément de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on note $\|f\| = \left(\int_a^b (f(t))^2 dt \right)^{1/2}$.

Première partie

I-1 Soit $K \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ on note $\|K\| = \left(\iint_{\Omega} (K(x, y))^2 dx dy \right)^{1/2}$.

Montrer que l'application de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^+ qui à K associe $\|K\|$ est une norme.

I-2 On pose $\begin{cases} A(x) = \left(\int_a^b (K(x, y))^2 dy \right)^{1/2} \\ B(y) = \left(\int_a^b (K(x, y))^2 dx \right)^{1/2} \end{cases}$. Comparer $\int_a^b (A(x))^2 dx$, $\int_a^b (B(y))^2 dy$ et $\|K\|$.

I-3 Soient $K \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on pose $g(y) = \int_a^b K(x, y) f(x) dx$.

Montrer que $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et que $\|g\| \leq \|K\| \|f\|$.

Dans toute la suite du problème on choisit $a = 0$, $b = 1$ et on suppose que $K \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ vérifie :

$$\forall y > x \quad K(x, y) = 0.$$

Soit f un élément donné de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et soit (x, y) un élément fixé de Ω .

Deuxième partie

II-1 On pose $K_1(x, y) = K(x, y)$ et par récurrence pour n entier naturel strictement positif

$$K_{n+1}(x, y) = \int_0^1 K(x, z) K_n(z, y) dz.$$

Montrer que l'on a : $K_n \in C(\Omega, \mathbb{R})$ et $K_n(x, y) = 0$ pour $y > x$.

II-2 Soit n un entier naturel strictement positif, montrer que :

$$\forall r \in \{1, \dots, n\}, K_{n+1}(x, y) = \int_0^1 K_r(x, z) K_{n+1-r}(z, y) dz.$$

II-3 On pose $\Phi_1(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t) f(t) dt$ et par récurrence

$$\Phi_{n+1}(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t) \Phi_n(t) dt.$$

On pose: $\begin{cases} \Psi_0(x) = f(x) \\ \Psi_{n+1}(x) = \int_0^x K(x, t) \Psi_n(t) dt \end{cases}$, pour n entier naturel

$$\text{Montrer que } \Phi_n(x) = \sum_{j=0}^n \Psi_j(x).$$

II-4 Montrer que $\Psi_j(x) = \int_0^x K_j(x, t) f(t) dt$, pour tout entier naturel strictement positif j .

II-5 Montrer que $(K_2(x, y))^2 \leq (A(x))^2 (B(y))^2$.

II-6 On pose $\begin{cases} F_1(x, y) = \int_y^x (A(z))^2 dz & \text{si } y \leq x \\ F_1(x, y) = 0 & \text{si } y > x \end{cases}$ et par récurrence pour $n \geq 2$

$$F_n(x, y) = \int_y^x (A(z))^2 F_{n-1}(z, y) dz.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, F_n est une fonction continue sur Ω et que $F_n(x, y) = 0$ si $y > x$.

II-7 Montrer que $F_n(x, y) = \frac{1}{n!} (F_1(x, y))^n$.

II-8 Montrer que $(K_{n+2}(x, y))^2 \leq (A(x))^2 (B(y))^2 F_n(x, y)$.

Troisième partie

III-1 Soit n un entier naturel strictement positif.

x étant fixé dans $[0, 1]$, on désigne par V_n la fonction définie par $V_n(t) = K_n(x, t)$

De même, y étant fixé dans $[0, 1]$, on désigne par U_n la fonction définie par $U_n(t) = K_n(t, y)$.

Montrer que les séries de fonctions de terme général U_n et V_n sont uniformément convergentes sur $[0, 1]$.

III-2 On pose $H(x, y) = - \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x, y)$. Montrer que $H(x, y)$ vérifie :

$$K(x, y) + H(x, y) = \int_y^x K(x, z) H(z, y) dz.$$

III-3 On pose $\Phi_{(f)}(x) = f(x) - \int_0^x H(x, t) f(t) dt$. Justifier l'existence de $\Phi_{(f)}$.

Montrer que $\Phi_{(f)}$ est un élément de $C([0,1], \mathbb{R})$.

III-4 Montrer que la suite de fonctions Φ_n converge vers $\Phi_{(f)}$.

III-5 Soient Λ et g deux éléments de $C([0,1], \mathbb{R})$, vérifiant

$$\Lambda(u) = g(u) - \int_0^u H(u,t) g(t) dt \text{ pour tout } u \in [0, 1].$$

Montrer que cette relation équivaut à $\Lambda(u) - \int_0^u K(u,t)\Lambda(t)dt = g(u)$.

III-6 Soit $\Phi \in C([0,1], \mathbb{R})$ qui vérifie pour tout $u \in [0, 1]$: $\Phi(u) = \int_0^u K(u,t)\Phi(t)dt$.

Montrer que $\forall u \in [0, 1], \Phi(u) = 0$

Les parties IV et V sont indépendantes.

Quatrième partie *Premier exemple d'application.*

Dans toute cette partie on pose $K(x,y) = \begin{cases} (x-y)e^{-y} & \text{si } y \leq x \\ 0 & \text{si } y > x \end{cases}$ et $\Omega = [0,1]^2$

IV-1 Calculer $K_n(x,y)$.

IV-2 En déduire $H(x,y)$.

IV-3 Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ une fonction connue. Trouver $\Phi_{(f)} \in C([0,1], \mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\Phi_{(f)}(x) - \int_0^x K(x,y)\Phi_{(f)}(y) dy = f(x)$$

IV-4 On pose $f(x) = e^x$. Calculer $\Phi_{(f)}$.

Cinquième partie *Second exemple d'application.*

Soit q un entier naturel strictement positif, on se donne q fonctions $a_i \in C([0,1], \mathbb{R})$, $i \in \{1, \dots, q\}$ et $F \in C([0,1], \mathbb{R})$, ainsi que q réels c_i , $i \in \{0, \dots, q-1\}$.

On cherche à résoudre le problème suivant :

$$(P) \text{ Trouver une fonction } u \text{ vérifiant } \forall x \in [0,1] : \begin{cases} u^{(q)}(x) + a_1(x)u^{(q-1)}(x) + \dots + a_q(x)u(x) = F(x) \\ u(0) = c_0, u'(0) = c_1, \dots, u^{(q-1)}(0) = c_{q-1} \end{cases}.$$

$$\text{On pose } \begin{cases} K(x,y) = \sum_{k=1}^q a_k(x) \frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} & \text{si } y \leq x \\ K(x,y) = 0 & \text{si } y > x \end{cases} \text{ et } \Phi(x) = u^{(q)}(x).$$

Calculer $\Phi(x) + \int_0^x K(x,y)\Phi(y)dy$. En déduire une méthode de résolution du problème (P).