e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PSI

durée 3 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Dans tout le problème, $\mathbf{R}$ désigne le corps des réels, E l'espace vectoriel des fonctions continues, définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, F l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1, définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Pour tout $f \in E$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et on rappelle que l'on définit ainsi une norme sur E.

Si g est une application k fois dérivable sur $[0,1]$, $g^{(k)}$ désigne la dérivée k – ième de g.

Préliminaires.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et u une fonction de classe C^n sur $[0,1]$.

On suppose que : $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $u^{(k)}(0) = 0$.

Prouver que : $\forall x \in [0,1]$, $u(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u^{(n)}(t)\, dt$.

Partie I : Pour $g \in F$ donnée, recherche de $f \in F$ vérifiant la relation :

$$(S) \quad : \quad \forall x \in [0,1], \quad f(x) - \int_0^x f(t)\, dt = g(x).$$

Question 1.

1. Montrer l'équivalence :

$$f \in F \text{ est solution de } (S) \iff \big(\forall x \in [0,1], f'(x) - f(x) = g'(x) \text{ et } f(0) = g(0)\big).$$

On note $(*)$ l'équation différentielle $y' - y = g'(x)$.

2. Résoudre l'équation différentielle $(*)$.

Question 2.

Prouver que (S) possède dans F une unique solution f définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = g(x) + \int_0^x e^{x-t} g(t)\ dt.$$

Question 3 : **Application**.

Déterminer la solution f de (S) lorsque g est la fonction $x \in [0,1] \mapsto \cos(x)$.

Partie II : **Quelques propriétés de la fonction** $T : f \in E \mapsto T(f)$ **définie par** :

$$\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \int_0^x f(t)\ dt.$$

On définit l'application T qui à $f \in E$ associe l'application $T(f)$, définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \int_0^x f(t)\ dt.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $T^n = T o T^{n-1}$, sachant que $T^0 = I_E$ (application identité de E).

Lorsque U est un endomorphisme continu de E, on désigne par $|||U|||$ le réel positif :

$$|||U||| = \sup_{\|f\|_\infty \leqslant 1} \|U(f)\|_\infty.$$

Question 1.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.

2. Préciser $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.

3. Quel est l'ensemble des valeurs propres de T ?

Question 2.

1. Montrer que $\forall x \in [0,1],\ |T(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty$.

En déduire que T est une application continue de $(E, \|\ \ \|_\infty)$ dans $(E, \|\ \ \|_\infty)$.

2. Prouver que $|||T||| \leqslant 1$.

3. On considère $f_0 : x \in [0,1] \mapsto f_0(x) = 1$. Que vaut $\|T(f_0)\|_\infty$?

4. Calculer $|||T|||$.

Question 3.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Montrer que $T^n(f)$ est de classe C^n sur $[0,1]$.

2. Prouver que pour tout entier naturel $k \in \{0,\ldots,n-1\}$, $(T^n(f))^{(k)} = T^{n-k}(f)$.

3. Que vaut $(T^n(f))^{(n)}$? $(T^n(f))^{(k)}(0)$ pour $k \in \{0,...,n-1\}$?

4. Montrer alors que : $\forall x \in [0,1],\ (T^n(f))(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\ dt.$

5. Préciser $\mathrm{Ker}(T^n)$ et $\mathrm{Im}(T^n)$.

6. Prouver que T^n est un endomorphisme continu de $(E, \|\ \ \|_\infty)$.

7. En utilisant la fonction f_0 définie à la question 2., prouver que : $|||T^n||| = \frac{1}{n!}$.

8. En déduire que : $\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ \lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(x) = 0$. Préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n$.

Partie III : **Pour $g \in E$ donnée, recherche de $f \in E$ vérifiant**

$$(S)\ :\ \forall x \in [0,1],\ f(x) - \int_0^x f(t)\ dt = g(x).$$

On note H l'application qui à $f \in E$ associe l'application $H(f)$ définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ H(f)(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t)\ dt.$$

Question 1.

1. Montrer que H est un endomorphisme de E.

2. Prouver que : $\exists K \geqslant 0$ tel que $\forall x \in [0,1],\ |H(f)(x)| \leqslant K\|f\|_\infty$.

En déduire que H est continue de $(E, \|\ \ \|_\infty)$ dans $(E, \|\ \ \|_\infty)$ et que $|||H||| \leqslant e$.

3. Montrer que $H(f)$ est C^1 sur $[0,1]$. Calculer, pour $x \in [0,1]$, $(H(f))'(x)$.

Question 2.

Prouver que $\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1]$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (T^n(f))(x)$ converge absolument.

Pour tout x de $[0,1]$ et tout f de E, on note $\Psi(f)(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} T^n(f)(x)$.

Question 3.

On se propose de montrer que $\Psi = H$.

1. On pose, pour n fixé dans $\mathbf{N}^*$, x fixé dans $[0,1]$ et f fixée dans E :

$$\begin{aligned} v_n\ :\ [0,x] &\to \mathbf{R} \\ t &\mapsto v_n(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t). \end{aligned}$$

Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge normalement sur $[0,x]$.

2. Prouver alors que $\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ \sum_{n=1}^{+\infty} (T^n(f))(x) = H(f)(x)$.

En déduire que $\Psi = H$.

Question 4.

1. On note $V = I_E - T$.

En calculant, pour $n \in \mathbf{N}$, $\left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right) o\, V$, trouver $W \in L(E)$ telle que : $W o\, V = I_E$.

2. Prouver alors que l'équation (S) possède une unique solution h dans E.

3. Déterminer h.

4. Que constate-t-on ?