L25Z

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP- EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PSI

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

R est l'ensemble des nombres réels et n un entier naturel.

Partie A Dans cette partie, on établit quelques résultats préliminaires qui pourront être utilisés dans les deux parties suivantes.

1° Pour $n \geq 1$, on pose : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$. Etudier la nature de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge. On note γ sa limite.

2° Pour x élément de $]0,+\infty[$, on considère l'application h_x de $]0,+\infty[$ vers **R** définie par :

$$h_x(t) = \frac{\ln t}{t^x}.$$

a) Déterminer le tableau de variation de h_x.

b) Justifier les inégalités : $\forall\, n \geq 3$, $\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\, dt \leq \frac{\ln n}{n}$ et $\forall\, n \geq 4$, $\frac{\ln n}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t}\, dt$.

c) Prouver que la série $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

$$\text{On pose : } S = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Les deux parties qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie B On se propose, dans cette partie, de calculer S.

Pour $n \geq 3$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$ et $a_n = t_n - \frac{(\ln n)^2}{2}$.

1° Utiliser les inégalités établies à la question 2° b) de la Partie A pour démontrer que :

a) la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante

b) la suite $(a_n)_n$ converge.

2° Montrer que : $\forall\, n \geq 3$, $S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \ln 2$. En déduire une expression de S_{2n} où figurent a_n , a_{2n} et u_n.

3° Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_{2n}$ (on exprimera cette limite en fonction de γ et de $\ln 2$). Déterminer S.

Partie C

On note F l'application de $]1, +\infty[$ vers $\mathbf{R}$ définie par : $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour $n \geq 1$, on considère l'application φ_n de $]0, +\infty[$ vers $\mathbf{R}$ définie par : $\varphi_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

Dans cette partie on étudie d'abord le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures, ensuite la série de fonctions $\sum \varphi_n$, puis on retrouve la valeur de S.

1° Pour $n \geq 1$, on considère les applications v_n et w_n de $[1, +\infty[$ vers $\mathbf{R}$ définies par :

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \quad \text{et} \quad w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\, dt .$$

a) i) Calculer $(v_n)'(x)$.

ii) Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ est normalement convergente sur $[1, +\infty[$.

b) i) Prouver que pour $n \geq 1$, w_n est continue sur $[1, +\infty[$.

ii) Montrer que : $\forall\, x \geq 1$, $\forall\, n \geq 1$, $0 \leq w_n(x) \leq v_n(x)$.

iii) On considère la fonction W définie par : $W = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$.

Démontrer que W est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

c) i) Montrer que : $\forall\ x > 1$, $W(x) = F(x) + \dfrac{1}{1-x}$.

ii) Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(F(x) + \dfrac{1}{1-x} \right)$ (on exprimera le résultat en fonction de γ).

2° a) Montrer que la série de fonctions $\sum \varphi_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

b) Soit a un élément de $]0, +\infty[$. Démontrer que la série de fonctions $\sum (\varphi_n)'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

c) On considère la fonction φ définie par : $\varphi = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varphi_n$. Montrer que φ est définie et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Exprimer $\varphi'(1)$ sous forme de somme d'une série.

3° a) Etablir que : $\forall\ x > 1$, $\varphi(x) = (1 - 2^{1-x})F(x)$.

b) Déterminer un développement limité de $1 - 2^{1-x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1, puis un développement limité de $\varphi(x)$ à l'ordre 1 au voisinage de 1.

c) En déduire la valeur de S.

Exercice 2

R est l'ensemble des nombres réels et n un entier naturel, $n \geq 1$.

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments de **R** deux à deux distincts.

$\mathbf{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

$\mathbf{R}_n[X]$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{R}[X]$ de degré au plus égal à n.

Pour tout k appartenant à $\{0, 1, \ldots, n\}$, on considère le polynôme P_k défini par :

$$P_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}.$$

1° Pour k et i éléments de $\{0, 1, \ldots, n\}$, calculer $P_k(x_i)$.

2° Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est un système libre de $\mathbf{R}_n[X]$. Que peut-on en déduire ?

3° a) Soit Q un élément de $\mathbf{R}_n[X]$. Démontrer que : $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$.

b) Pour m élément de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on pose: $s_m = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k^m P_k(0)$. Calculer s_m.

Les questions 4° et 5° qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre.

4° Dans cette question Q est un élément de $\mathbf{R}[X]$. On pose : $Q_1 = Q - \sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$.

a) Démontrer que Q_1 admet au moins $n+1$ racines réelles distinctes.

b) On pose : $s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1} P_k(0)$ et $s_{n+2} = \sum_{k=0}^{n} x_k^{n+2} P_k(0)$.

i) Déduire de la question 4° a) que : $s_{n+1} = (-1)^n \prod_{k=0}^{n} x_k$.

ii) Calculer s_{n+2}. Exprimer le résultat en fonction de n, de $\sum_{k=0}^{n} x_k$ et de $\prod_{k=0}^{n} x_k$.

5° Dans cette question Q est un polynôme unitaire de $\mathbf{R}_n[X]$ de degré égal à n.

On suppose de plus que $x_0, x_1, ..., x_n$ sont des entiers relatifs vérifiant : $x_0 < x_1 < .... < x_n$.

Pour k élément de $\{0,1,....,n\}$, on note : $y_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)$.

a) Prouver que : $|y_k| \geq k!(n-k)!$.

b) Déduire de la question 3° a) que : $\sum_{k=0}^{n} \frac{Q(x_k)}{y_k} = 1$.

c) On définit M par : $M = \max_{0 \leq k \leq n} |Q(x_k)|$. Démontrer que : $M \geq \frac{n!}{2^n}$.