e3a

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PSI

durée 3 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Soit (L) l'équation différentielle : $y''(x) - y(x) = b(x)$, définie sur $[0,1]$, où b et y sont des fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, b continue et y de classe C^2 et (L_0) l'équation différentielle homogène associée : $y''(x) - y(x) = 0$.

Partie 1 : Expression des solutions de (L).

1. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (L_0) ? En donner une base.

2. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (L) ?

3. Vérifier que la fonction $h : x \in [0,1] \mapsto h(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\, b(t)\, dt$ est une solution de l'équation différentielle (L).

$\left(\text{Rappel : pour tout } z \text{ réel, } \operatorname{sh}(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ et } \operatorname{ch}(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}\right)$.

4. En déduire que les solutions de (L) s'écrivent sous la forme :

$$\forall\, x \in [0,1],\ y(x) = A\operatorname{ch}(x) + B\operatorname{sh}(x) + h(x)$$

où A et B sont des constantes réelles.

5. Soient α et β deux nombres réels.

Prouver l'existence d'une unique solution s de (L) vérifiant : $\begin{cases} s(0) = \alpha\operatorname{sh}(1) \\ \quad et \\ s(1) = \beta\operatorname{sh}(1) \end{cases}$

Tournez la page S.V.P

On admettra que la fonction s est la fonction :

$$s : x \in [0,1] \mapsto s(x) = \alpha \operatorname{sh}(1-x) + \beta \operatorname{sh}(x) - \int_0^1 H(x,t)\, b(t)\, dt$$

où H est la fonction de deux variables définie par :

$$\begin{array}{rcl} H : [0,1]^2 & \to & \mathbf{R} \\ (x,t) & \mapsto & H(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{sh}(1)} \operatorname{sh}(1-x)\operatorname{sh}(t) & \text{si } t \leqslant x, \\ \dfrac{1}{\operatorname{sh}(1)} \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(1-t) & \text{si } t \geqslant x \end{cases} \end{array}$$

et que la fonction $x \mapsto \int_0^1 H(x,t)\, b(t)\, dt$ est de classe C^2 sur $[0,1]^2$.

Partie 2 : Développement en série de Fourier de la fonction *H*.

On fixe x dans $[0,1]$ et soit φ la fonction impaire, 2 – périodique, définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall\, t \in [0,1],\ \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(1-x)}{\operatorname{sh}(1)} \operatorname{sh}(t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant x, \\ \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{sh}(1)} \operatorname{sh}(1-t) & \text{si } x \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

1. Donner une allure de la représentation graphique de φ sur $[-2,2]$ dans le cas où $x = \frac{1}{4}$ avec $\operatorname{sh}(1) \simeq 1{,}2$, $\operatorname{sh}\left(\frac{3}{4}\right) \simeq 0{,}8$ et $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{4}\right) \simeq 0{,}25$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de φ.

3. La série de Fourier de φ converge-t-elle ? Vers quelle fonction ? Justifiez votre réponse.

4. En déduire que : $\forall\, (x,t) \in [0,1]^2,\ H(x,t) = 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n x)\, \sin(\pi n t)}{n^2 \pi^2 + 1}$.

Partie 3 : Etude d'un endomorphisme auto-adjoint défini par *H*.

Soit $E = C^0([0,1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire suivant :

$$\forall\, (f_1, f_2) \in E^2,\ (f_1 \mid f_2) = \int_0^1 f_1(t)\, f_2(t)\, dt$$

dont la norme associée est notée $\|\ \|$.

Soit Ψ l'application qui à tout élément f de E associe $\Psi(f)$ définie par :

$$\forall\, x \in [0,1],\ \Psi(f)(x) = \int_0^1 H(x,t)\, f(t)\, dt.$$

1. Vérifier que Ψ est un endomorphisme de E.

2. Justifier que pour toute application f appartenant à E et pour tout x appartenant à $[0,1]$,

$$\Psi(f)(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n x)}{n^2\pi^2+1} \left(\int_0^1 f(t) \sin(\pi n t)\, dt \right).$$

3. Donner la définition d'un endomorphisme auto-adjoint (ou symétrique) de E.
Prouver que Ψ est un endomorphisme auto-adjoint de E.

4. Vérifier que : $\forall f \in E, \quad (\Psi(f) \mid f) \geqslant 0$.

5. Soit $u \in E$ telle que : $(\Psi(u) \mid u) = 0$.

5.1. Vérifier que : $\forall n \in \mathbf{N}, \displaystyle\int_0^1 u(x) \sin(\pi n x)\, dx = 0$.

5.2. Soit F la fonction définie sur $\mathbf{R}$, impaire et 2 – périodique, telle que :

$$F : x \in [0,1] \mapsto F(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } x \in]0,1[\\ 2 \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

Exprimer les coefficients de Fourier de F en fonction de u.

En déduire que : $\displaystyle\int_0^1 u^2(x)\, dx = 0$.

5.3. Prouver alors que :
Pour toute fonction v différente de la fonction nulle de E, $(\Psi(v) \mid v) > 0$.

5.4. Quel résultat peut-on en conclure pour les valeurs propres de Ψ ?

6. Pour $m \in \mathbf{N}^*$, soit la fonction f_m définie par :
$\forall x \in [0,1], \quad f_m(x) = \sin(\pi m x)$.

6.1. Soient p et q deux entiers naturels non nuls. Calculer : $\displaystyle\int_0^1 \sin(\pi p x) \sin(\pi q x)\, dx$.

6.2. Déterminer, pour $m \in \mathbf{N}^*$, $\Psi(f_m)$.

7. Soit λ une valeur propre de Ψ et f_λ un vecteur propre associé.

7.1. Prouver que f_λ est de classe C^2 sur $[0,1]$.

7.2. Vérifier que f_λ est solution du problème : $\begin{cases} y''(x) - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

7.3. Prouver qu'il est impossible que $\lambda = 1$.

7.4. Prouver qu'il est impossible que $1 - \frac{1}{\lambda} > 0$.

7.5. Lorsque $1 - \frac{1}{\lambda} < 0$, montrer qu'il existe $m \in \mathbf{N}^*$ tel que : $\lambda = \dfrac{1}{m^2\pi^2+1}$.

7.6. Déterminer alors les éléments propres de Ψ.

Partie 4 : Calcul de la norme de l'endomorphisme Ψ.

1. Déterminer, pour $m \in \mathbf{N}^*$, $\|f_m\|$.

On pose alors, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $h_m = \dfrac{f_m}{\|f_m\|}$.

2. Vérifier que :

2.1. $\forall f \in E, \; \Psi(f) = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(h_m \mid f)}{m^2 \pi^2 + 1} \, h_m$,

2.2. $\forall f \in E, \; \|f\|^2 = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} (h_m \mid f)^2.$

3. En déduire que :

$$\forall f \in E, \quad \|\Psi(f)\|^2 \leqslant \frac{\|f\|^2}{(\pi^2 + 1)^2}.$$

4. Prouver que Ψ est un endomorphisme continu de $(E, \| \quad \|)$.

5. Enfin, calculer : $\displaystyle\sup_{\|f\|=1} \|\Psi(f)\|$.

Fin du problème.