J. 1968

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

ANNEE 2002

# CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Le sujet comprend :

- 1 page de garde,
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 12 pages de texte, numérotées de 1 à 12.

**CALCULATRICE AUTORISEE**

Questions liées: 1 à 16
17 à 25
26 à 30

## PARTIE I

*Dans toute cette partie le corps de base est celui des nombres réels; on désigne par $E(x)$ la partie entière du nombre réel $x$ et par $n$ un entier naturel.*

### Question 1

Soit un polynôme de degré $n$ à une indéterminée à coefficients entiers de la forme $a_n x^n + \ldots + a_o$ avec $a_o \neq 0$, admettant une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ ou $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{Z}^*$, $p$ et $q$ étant premiers entre eux ou étrangers. On a alors:

a) $p$ divise $a_n$ et $q$ divise $a_o$

b) $p$ et $q$ divisent $a_o$

c) $p$ divise $a_o$ et $q$ divise $a_n$ car $q$ divise $a_n p^n$

d) $p$ divise $a_o$ mais $pq$ ne divise pas $a_n a_o$

### Question 2

Soit $f$ la fonction polynôme définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - x - 1$

a) $f$ admet au moins 2 racines réelles car sa dérivée s'annule en 2 points

b) $f$ admet une racine rationnelle et 2 racines complexes conjuguées

c) $f$ ne possède aucune racine réelle

d) $f$ admet 2 racines complexes conjuguées et une racine réelle dans l'intervalle $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

### Question 3

Soit $x$ un réel quelconque, on peut écrire $\cos(nx)$ sous la forme $P_n(\cos x)$ où $P_n$ est un polynôme à une indéterminée.

a) de degré $n + 1$ à coefficients entiers relatifs

b) de degré $n$ à coefficients réels non entiers

c) de degré $n$ à coefficients entiers relatifs

d) unique car l'application cos est surjective de $\mathbb{R}$ sur $[-1,1]$

**Question 4**

Le polynôme $P_n$ défini dans la question 3 s'écrit pour $n = 0$

a) $P_o(X) = X$

b) $P_o(X) = \frac{1}{2}$

et pour $n = 1$

c) $P_1(X) = 2X^2 - 1$

d) $P_1(X) = X$

**Question 5**

On a la relation, pour tout réels $a, b$

a) $\cos a \cos b = 2(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

b) $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

et la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans la question 3 vérifie, pour tout entier $n$ strictement positif.

c) $P_{n+1}(X) - P_{n-1}(X) = 2XP_n(X)$

d) $P_{n+1}(X) + P_{n-1}(X) = XP_n(X)$

**Question 6**

Cette suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que:

a) $P_n(X) = X^n - C_n^2 X^{n-2}(1-X^2) + \ldots + (-1)^k C_n^{2k} X^{n-2k}(1-X^2)^k + \ldots$
et $P_n$ est impair si $n$ est pair

b) le coefficient de $X^n$ est, pour tout entier $n$ non nul,
$C_n^o + C_n^2 + \ldots + C_n^{2k} + \ldots = 2^{n-1}$

c) $P_n(-1) = (-1)^{n-1} \; \forall n \in \mathbb{N}^*$

d) $P_n(0) = (-1)^n \; \forall n \in \mathbb{N}$

## Question 7

Pour tout entier $n$ strictement positif les racines $x_k$ de ce polynôme $P_n$ sont:

a) $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ où $k$ est un entier tel que $0 \le k \le n-1$

b) $\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}$ où $k$ est un entier est un entier tel que $0 \le k \le n-1$

c) des réels n'appartenant pas à l'intervalle $[-1, 1]$

d) les $n$ réels de l'intervalle $]-1,1[$ définis par $x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ où $k$ est un entier tel que $0 \le k \le n-1$

## Question 8

Supposons $n \ge 2$, on note pour $k$ entier tel que $0 \le k \le n-2$, $x_k$ les racines de $P_n$ et $y_k$ celles de $P_{n-1}$, on a alors:

a) $x_{k+1} > y_k > x_k$

b) $x_{k+1} > x_k > y_k$

c) $x_k > y_k > x_{k+1}$ car $\frac{\pi}{2(n-1)} + \frac{k\pi}{n-1} - \frac{\pi}{2n} - \frac{(k+1)\pi}{n} < 0$

et $\frac{\pi}{2(n-1)} + \frac{k\pi}{n-1} - \frac{\pi}{2n} - \frac{k\pi}{n} > 0$

d) $x_k > y_k > x_{k+1}$ car $\frac{\pi}{2(n-1)} + \frac{k\pi}{n-1} - \frac{\pi}{2n} - \frac{(k+1)\pi}{n} > 0$

et $\frac{\pi}{2(n-1)} + \frac{k\pi}{n-1} - \frac{\pi}{2n} - \frac{k\pi}{n} < 0$

*On considère l'équation différentielle, pour $n \in \mathbb{N}$ $(E_n)$ $y'' + n^2 y = 0$*

## Question 9

La fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos(nx)$

a) forme une base de l'espace des solutions de $(E_n)$

b) est une solution de $(E_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) vérifie l'équation $(E_n)$ uniquement pour $n \in \mathbb{N}^*$

d) vérifie l'équation différentielle $y'' - n^2 y = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

**Question 10**
Si on pose $X = \cos x$ on obtient pour $y$ fonction de $x$

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -X \dfrac{dy}{dX}$

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sin^2 x \dfrac{d^2y}{dX^2} - \cos x \dfrac{dy}{dX}$

et l'équation $(E_n)$ est transformée en l'équation $(E'_n)$ de la forme,

c) $(1 + X^2)\dfrac{d^2y}{dX^2} - X\dfrac{dy}{dX} + n^2 y = 0$

d) $(1 - X^2)\dfrac{d^2y}{dX^2} - X\dfrac{dy}{dX} + n^2 y = 0$

**Question 11**
Pour tout $n$ ,entier naturel, la fonction polynôme $P_n$ définie à la question 3

a) est solution de $(E_n)$

b) est solution de $(E'_n)$ car $(1 + x^2)P''_n(x) - xP'_n(x) + n^2 P_n(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$

c) ne vérifie ni $(E_n)$, ni $(E'_n)$

d) vérifie $(E'_n)$ car $\forall x \in [-1,1]$ $\quad (1 + x^2)P''_n(x) - xP'_n(x) + n^2 P_n(x) = 0$

**Question 12**
Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction polynôme $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{n,k}\, x^{n-2k}$

Si $Qn$ est solution de l'équation $(E'_n)$, définie à la question 10, les coefficients $a_{n,k}$ vérifient pour tout $k$ compris entre 0 et $E\left(\dfrac{n}{2}\right)$.

a) $(n - 2k)(n - 2k - 1)a_{n,k} + (n - 2k + 2)(n - 2k + 1)a_{n,k-1} - (n - 2k)a_{n,k} + n^2 a_{n,k} = 0$

b) $a_{n,k} = -\dfrac{1}{4k}\dfrac{1}{n-k}(n - 2k + 2)(n - 2k + 1)a_{n,k-1}$

c) $a_{n,k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k}$

d) $a_{n,k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k} a_{n,0}$

**Question 13**

Pour tout entier naturel $n$, le polynôme $P_n$ défini à la question 3 est donc de la forme:

a) $P_n(X) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{(-1)^k}{n-k} n 2^{n-2k-1} C_{n-k}^{k} X^{n-2k}$

b) $P_n(X) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^{k-1}}{n-k} n 2^{n-2k-1} C_{n-k}^{k} X^{n-2k}$

c) $P_n(X) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{n}{n-k} 2^{n-2k-1} C_{n-k}^{k} X^{n-2k+1}$

d) $P_n(X) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{n}{n-k} 2^{n-2k-1} C_{n-k}^{k} X^{n-2k}$

*Soient $p$ et $q$, 2 entiers naturels non nuls premiers entre eux (ou étrangers), tels que le rationnel $r = \frac{p}{q}$ vérifie $0 < r < \frac{1}{2}$ et $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ désignant l'ensemble des nombres rationnels)*

**Question 14**

On a alors:

a) $q = 2$ et $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q}$

b) $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 tq \ \pi \frac{p}{q} u + \pi v = \frac{\pi}{q}$

c) $q \geq 3$ et $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 tq \;\; \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) = P_u(\cos(r\pi))$

d) $q \geq 3 \;\; \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q}$ car $\exists v \in \mathbb{Z} \;\; \exists n \in \mathbb{N} tq \;\; \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) = (-1)^v P_n(\cos(r\pi))$

**Question 15**

La relation $q = 4k$ où $k$ est un entier non nul.

a) est impossible puisque $q = 2$

b) est impossible car $q$ est nécessairement impair

c) peut être réalisée

d) est impossible car $P_k\left(\cos\left(\frac{\pi}{4k}\right)\right) = \cos\frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$

**Question 16**

L'égalité $q = h$ entier impair

a) ne peut être réalisée

Si cette égalité est réalisée on a:

b) $P_h\left(\cos\left(\frac{\pi}{h}\right)\right) = -1$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{h}\right)$ est racine du polynôme $P_h$.

d) $\cos\left(\frac{\pi}{h}\right)$ est racine de $2^{h-1}X^h + \ldots + a_{h,\frac{h-1}{2}} X + 1 = 0$ car $P_h$ a un terme constant nul.

## PARTIE II

*On désignera par $E$ l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$, des polynômes à une indéterminée à coefficients réels et par $F$ le sous-espace vectoriel des polynômes de $E$ de degré inférieur ou égal à 3.*
*On considère l'application $f$ qui à tout élément $P$ de $E$ associe le polynôme $f(P)$ défini par $[f(P)](X) = P(X) - P(X-1)$ et on note $f_F$ la restriction de $f$ à $F$*

### Question 17

Le sous-espace vectoriel $F$ est de dimension

a) 3
b) 4

et on a:

c) $f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$
d) $f_F$ est un endomorphisme de $F$

### Question 18

La matrice $M$ de l'application $f_F$ par rapport aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée de cette application s'écrit:

a) $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

c) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**Question 19**

De manière générale, pour des matrices de type $(n,p)$ ($n$ lignes et $p$ colonnes) à coefficients dans le corps $K$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on a:

a) 2 matrices équivalentes sont semblables
b) 2 matrices équivalentes ont même rang

et lorsque l'on ajoute à la ligne $i_o$ d'une matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(K)$ la ligne $i_i$ multipliée par $\lambda \in K$, le rang de cette matrice,

c) est inchangée
d) peut être modifié

**Question 20**

Le rang de l'application $f_F$

a) vaut 3 car est égal au nombre de colonnes non nulles de $M$
b) est nécessairement inférieur ou égal à 3 car l'espace $F$ est de dimension 3
c) vaut 2 car il y a 2 colonnes de $M$ linéairement indépendantes
d) vaut 3 car on peut extraire au plus 3 colonnes ou lignes linéairement indépendantes de $M$

**Question 21**

Les sous-espaces vectoriels noyau et image de $f_F$ sont tels que:

a) $dim\, ker f_F = dim F - rg f_F = 2$
b) $ker f_F = \mathbb{R}$
c) la famille de polynômes $(1,X)$ forme une base de $Im f_F$
d) $Im f_F$ est le sous-espace $\mathbb{R}_2[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2

*On considère la famille $(A_0, A_1, A_2, A_3)$ des polynômes de $E$ définie par $A_0 = 1$ et $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ $f_F(A_i) = iA_{i-1}$ avec $O$ racine de $A_i$.*

## Question 22

Ces polynômes vérifient:

a) $0 < deg A_i \leq 3 \quad \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$

b) $A_i$ est divisible par $X$, $\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$

c) $A_2(X) = X(X+1)$ et $A_3(X) = X(X+1)(X+2)$

d) la famille $(A_0, A_1, A_2, A_3)$ forme une base de $F$

*On note $B$ base canonique de $F$ et $\mathcal{A}$ la base de $F$ formée à l'aide des polynômes $(A_0, A_1, A_2, A_3)$ classés par ordre croissant de degré.*

## Question 23

La matrice de passage $P$ de la base $B$ à la base $\mathcal{A}$ s'écrit:

a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

**Question 24**

La matrice $M'$ de l'application $f_F$ lorsque l'on rapporte $F$ à la base $\mathscr{A}$ s'écrit:

a) $M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

b) $M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) $M' = PMP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $M' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P^{-1}MP$

**Question 25**

Soit $g$ l'application définie par $g(X^i) = A_i \ \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . On a alors:

a) $g$ est un endomorphisme injectif mais non bijectif de $F$
b) $g$ est un endomorphisme bijectif de $F$ car $g$ transforme une base de $F$ en une base de $F$

et la matrice $G$ de $g$ par rapport à la base canonique de $F$ vérifie:

c) $G = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $G = P$

## PARTIE III

*On pose pour tout entier naturel $n$ :* $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \; dx$

### Question 26

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que:

a) $I_o = 0$

b) $I_1 = -1$

c) $I_n - I_{n-1}$ peut être nul pour certaines valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$

d) $I_n - I_{n-1} > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$

### Question 27

Pour tout entier $n \geq 2$ on a la relation:

a) $I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n+1} I_n$

b) $I_n = \frac{n}{n-1} I_{n-2}$

c) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

d) $I_n = \frac{n+1}{n} I_{n-1}$

### Question 28

Le terme général $I_n$ de cette suite s'écrit, pour tout entier naturel $n$

a) $I_n = (n+1) I_o$

b) $I_{2p} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!} \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2} \;\; \forall p \in \mathbb{N}$

c) $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2} \pi$ et $I_{2p+1} = -\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \forall p \in \mathbb{N}$

d) $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2} \pi$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \forall p \in \mathbb{N}$

**Question 29**

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

a) est strictement croissante
b) est décroissante et peut être stationnaire
et elle vérifie les inégalités

c) $I_{2p+1} > I_{2p} > I_{2p-1}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$
d) $I_{2p+1} < I_{2p-1}$ et $I_{2p} > I_{2p-2}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$

**Question 30**

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

a) est convergente car les suites $(I_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(I_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes
b) est divergente car les suites $(I_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(I_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite

et pour tout entier naturel $n$, on a, en introduisant le changement de variable $x = \cos t$

c) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = I_{2n+1}$
d) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = -I_{2n}$