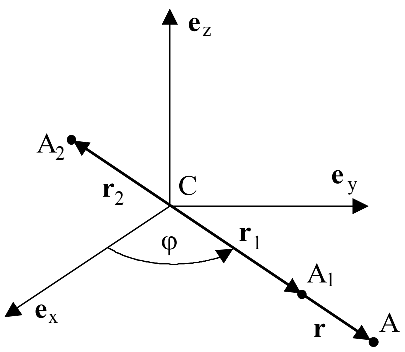
EPL - SESSION 2006
ÉNONCÉ

Questions liées.

[1,2,3,4,5,6] [7,8,9,10,11,12] [13,14,15,16,17,18] [19,20,21,22,23,24] [25,26,27,28,29,30] [31,32,33,34,35,36]

1. Deux corps assimilés à des points matériels A_1 et A_2, de masses respectives m_1 et m_2, évoluent isolément du reste de l'Univers sous la seule action des forces de gravitation qu'elles exercent l'une sur l'autre. On note C le centre de masse du système, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{CA}_1$ et $\mathbf{r}_2 = \mathbf{CA}_2$ les rayons vecteurs des deux corps et $\mathcal{G} \approx 6,67.10^{-11}\text{SI}$ la constante de gravitation universelle. Ce problème, à deux corps, se réduit dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}^*$ du centre de masse, à l'étude du mouvement d'un point matériel fictif A de masse μ, de rayon vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{CA} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ (*figure ci-contre*), soumis à la force $\mathbf{F} = -\mathcal{G}\, m_1 m_2 \dfrac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$.



Exprimer μ en fonction de m_1 et m_2.

a) $\mu = m_1 + m_2$ b) $\mu = \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)^{-1}$ c) $\mu = \sqrt{m_1 m_2}$ d) $\mu = \left(\dfrac{1}{m_1} - \dfrac{1}{m_2}\right)^{-1}$

2. Quelles sont, au cours du mouvement de A, les grandeurs conservatives ?

a) L'énergie mécanique de A. b) L'énergie potentielle de A.
c) L'énergie cinétique de A. d) Le moment cinétique de A en C.

3. Le référentiel $\mathcal{R}^*$ est muni du repère cartésien $(C,\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z)$. Le mouvement de A s'effectue dans le plan $(C,\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y)$. On désigne respectivement par $r = \|\mathbf{r}\|$ et $\varphi = (\mathbf{e}_x, \mathbf{r})$, la coordonnée radiale et l'angle orienté, du système de coordonnées polaires. Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de A.

a) $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ b) $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\ddot{\varphi}\right) - \mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{r}$

c) $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{r}$ d) $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\ddot{\varphi}\right) + \mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

4. Donner l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ de A en fonction de $r(\varphi)$, $\dfrac{dr}{d\varphi}$, μ et L_z composante sur l'axe $(C,\mathbf{e}_z)$ du moment cinétique de A en C.

a) $\mathcal{E}_k = \dfrac{\mu L_z^2}{2r^2}\left(1 + \dfrac{1}{r}\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}\right)$ b) $\mathcal{E}_k = \dfrac{\mu L_z^2}{2r^2}\left(1 + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}\right)$

c) $\mathcal{E}_k = \dfrac{L_z^2}{2\mu r^2}\left(1 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2\right)$ d) $\mathcal{E}_k = \dfrac{\mu L_z^2}{2r^2}\left(1 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2\right)$

5. En introduisant la fonction $u(\varphi)=\dfrac{1}{r(\varphi)}$ dans les expressions précédentes, on établit l'équation différentielle suivante : $\dfrac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\dfrac{1}{p}$. Expliciter p.

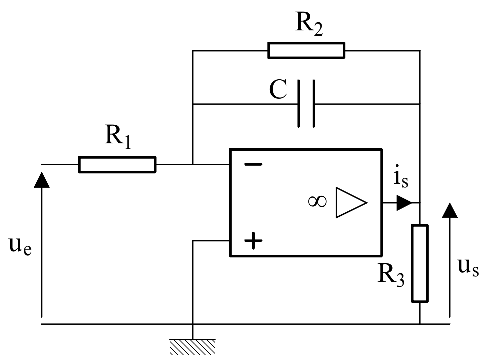
a) $p=\dfrac{\mu L_z^2}{2\mathcal{G}m_1m_2}+\dfrac{\mathcal{G}m_1m_2}{2\mathcal{E}_m}$ b) $p=\dfrac{L_z^2}{\mu\mathcal{G}m_1m_2}$

c) $p=\dfrac{L_z^2}{2\mu\mathcal{G}m_1m_2}+\dfrac{\mathcal{G}m_1m_2}{2\mathcal{E}_m}$ d) $p=\dfrac{\mathcal{G}m_1m_2}{2\mathcal{E}_m}$

6. Le système à deux corps constitué par une sonde interplanétaire et la Terre, que l'on assimile à des points matériels, est supposé isolé du reste de l'Univers. La sonde, de masse m_1 négligeable devant celle de la Terre, se confond avec le point matériel fictif A précédemment étudié, tandis que la Terre, se confond avec le centre de masse C du système. Calculer la vitesse de libération v_ℓ de la sonde dans $\mathcal{R}^*$ à une altitude de 400 km pour une masse m_2 = $5{,}98.10^{24}$ kg de la Terre, supposée sphérique, de rayon $R_T = 6470\text{km}$.

a) $v_\ell = 10{,}8\ \text{km.s}^{-1}$ b) $v_\ell = 341\ \text{km.s}^{-1}$ c) $v_\ell = 10800\ \text{km.s}^{-1}$ d) $v_\ell = 38800\ \text{km.s}^{-1}$

7. Sur le circuit représenté ci-contre, les résistors ont des résistances de valeurs R_1 = 4,7 kΩ, R_2 = 5,6 kΩ, R_3 = 2 kΩ, et le condensateur, une capacité C = 15 nF. L'amplificateur opérationnel est supposé parfait et fonctionne en régime linéaire.
Déterminer le facteur d'amplification en tension $A_0=\dfrac{u_s}{u_e}$ en régime continu établi.



a) $A_0=-0{,}84$ b) $A_0=-1{,}2$

c) $A_0=0{,}84$ d) $A_0=1{,}2$

8. Quelle est la fréquence de coupure f_0 à –3 dB du système ?

a) f_0 = 1895 Hz b) f_0 = 2258 Hz c) f_0 = 11900 Hz d) f_0 = 14200 Hz

9. La tension d'entrée u_e est sinusoïdale d'amplitude 8V et de fréquence 5,2 kHz. Déterminer l'amplitude $u_{s,m}$ de la tension de sortie.

a) $u_{s,m}$ = 0,78 V b) $u_{s,m}$ = 1,1 V c) $u_{s,m}$ = 2,3 V d) $u_{s,m}$ = 3,3 V

10. Quel est alors, en degrés, le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée ?

a) La sortie est en avance de 70° sur l'entrée. b) La sortie est en retard de 70° sur l'entrée.

c) La sortie est en avance de 110° sur l'entrée. d) La sortie est en retard de 110° sur l'entrée.

11. Calculer l'amplitude $i_{s,m}$ du courant de sortie i_s de l'amplificateur opérationnel.

a) $i_{s,m}$ = 52 µA b) $i_{s,m}$ = 1,9 mA c) $i_{s,m}$ = 2,7 mA d) $i_{s,m}$ = 3,4 mA

12. La tension d'entrée u_e est maintenant une tension en créneau de fréquence 50 kHz. Quelle est la forme de la tension de sortie u_s ?

a) La tension de sortie est de forme sinusoïdale.
b) La tension de sortie est de forme triangulaire.
c) La tension de sortie est une succession d'arcs de parabole.
d) La tension de sortie est une succession d'impulsions.

13. Le noyau d'un atome d'hydrogène, supposé ponctuel, de charge électrique $e \approx 1{,}6.10^{-19}\,\text{C}$, est localisé en O, origine du système de coordonnées sphériques. La charge électrique –e de l'électron de cet atome est, elle, répartie dans tout l'espace, avec une charge volumique $\rho(r)=\rho_0\exp\left(-\dfrac{2r}{a_0}\right)$ où r désigne la coordonnée radiale du système de coordonnées sphériques, a_0 est une constante positive et ρ_0 une constante que l'on déterminera plus loin. Sachant que la fonction $g(x)=x^2\exp(-x)$ admet pour primitive $G(x)=-\left(x^2+2x+2\right)\exp(-x)+C$ où C est une constante, calculer la charge électrique totale Q(R) contenue dans une sphère de centre O et de rayon R.

a) $Q(R)=e+\frac{4}{3}\pi a_0^3\rho_0\left(1-\exp\left(-\frac{2R}{a_0}\right)\right)$

b) $Q(R)=e+2\pi a_0^3\rho_0-2\pi a_0^3\rho_0\left(1-\exp\left(-\frac{2R}{a_0}\right)\right)$

c) $Q(R)=e+4\pi a_0^3\rho_0-\pi a_0^3\rho_0\left(1+\frac{2R}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{2R}{a_0}\right)$

d) $Q(R)=e+\pi a_0^3\rho_0-\pi a_0^3\rho_0\left(1+2\frac{R}{a_0}+2\left(\frac{R}{a_0}\right)^2\right)\exp\left(-\frac{2R}{a_0}\right)$

14. Calculer la charge totale contenue dans tout l'espace et en déduire ρ_0.

a) $\rho_0=-e\frac{3}{4\pi a_0^3}$ b) $\rho_0=-\frac{e}{2\pi a_0^3}$ c) $\rho_0=-\frac{e}{\pi a_0^3}$ d) $\rho_0=\frac{e}{\pi a_0^3}$

15. Exprimer la composante radiale $E_r(r)$ du champ électrique créé par l'atome (ε_0 *désigne la permittivité du vide*).

a) $E_r(r)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1+2\frac{r}{a_0}+2\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\right)\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)$

b) $E_r(r)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1+2\frac{r}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)$

c) $E_r(r)=\frac{e}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)$

d) $E_r(r)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2}\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)$

16. Le potentiel électrostatique créé par l'atome s'exprime sous la forme suivante :

$$V(r)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}+K\right)\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)$$

Déterminer K.

a) $K=0$ b) $K=\frac{1}{a_0}$ c) $K=\frac{1}{2a_0}$ d) $K=\frac{2}{a_0}$

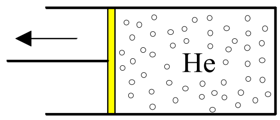
17. On suppose désormais que l'électron est assimilable à un point matériel M, de charge $-e$ localisée en M, que sa trajectoire est une cercle de rayon a_0 et de centre O fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire supposé galiléen, et que l'atome est isolé du reste de l'Univers. Calculer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de l'électron dans $\mathcal{R}$. On négligera les forces d'interaction gravitationnelles entre les deux particules.

a) $\mathcal{E}_m=-\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 a_0}$ b) $\mathcal{E}_m=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0}$ c) $\mathcal{E}_m=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2}$ d) $\mathcal{E}_m=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0}$

18. Expérimentalement, on mesure une énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de $-13{,}6$ eV. Calculer a_0, sachant que $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\approx 9{,}0.10^9\,\mathrm{SI}$.

a) $a_0 = 53$ pm b) $a_0 = 53$ nm c) $a_0 = 0{,}11$ nm d) $a_0 = 0{,}21$ pm

19. Une enceinte cylindrique fermée par un piston, mobile sans frottement, contient 500 g d'hélium gazeux, monoatomique, de masse molaire M = 4 $g.mol^{-1}$. Dans l'état (1) initial, le volume de l'enceinte est V_1 = 100 L, et le gaz, supposé parfait, est à la température T_1 = 600 K. On rappelle que l'énergie interne de n moles de gaz parfait monoatomique à la température T s'écrit $U = \frac{3}{2}nRT$ où $R \approx 8,31 mol^{-1}.K^{-1}$ désigne la constante des gaz parfaits.



Calculer la capacité thermique massique à volume constant c_V de l'hélium.

a) $c_V = 1,38 kJ.K^{-1}.kg^{-1}$ b) $c_V = 2,91 kJ.K^{-1}.kg^{-1}$
c) $c_V = 3,12 kJ.K^{-1}.kg^{-1}$ d) $c_V = 5,19 kJ.K^{-1}.kg^{-1}$

20. Par déplacement du piston, le gaz subit une détente isotherme, supposée réversible, qui le conduit à l'état (2) caractérisé par un volume V_2 = 250 L. Calculer la pression p_2 du gaz dans l'état (2).

a) $p_2 = 2,49.10^6$ Pa b) $p_2 = 2,49.10^3$ Pa c) $p_2 = 9,97.10^6$ Pa d) $p_2 = 9,97.10^3$ Pa

21. Quel est le travail W_{12} reçu par le gaz au cours de cette évolution isotherme ?

a) $W_{12} = -2280 kJ$ b) $W_{12} = -571 kJ$ c) $W_{12} = 571 kJ$ d) $W_{12} = 2280 kJ$

22. On envisage une nouvelle évolution réversible, constituée d'une détente adiabatique entre l'état (1) et un état intermédiaire (3) de volume $V_3 = V_2$, suivie d'un chauffage isochore entre l'état (3) et l'état final (2), défini précédemment. Déterminer la température T_3 de l'état intermédiaire.

a) T_3 = 326 K b) T_3 = 416 K c) T_3 = 866 K d) T_3 = 1105 K

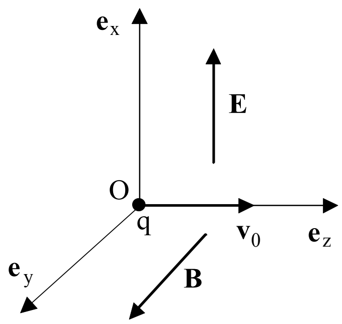
23. Calculer le travail W_{132} reçu par le gaz au cours des évolutions successives : $(1) \rightarrow (3) \rightarrow (2)$.

a) $W_{132} = -287 kJ$ b) $W_{132} = -427 kJ$ c) $W_{132} = 414 kJ$ d) $W_{132} = 787 kJ$

24. Déterminer la variation d'entropie ΔS du gaz entre l'état (1) et l'état (2).

a) $\Delta S = -3807 J.K^{-1}$ b) $\Delta S = -952 J.K^{-1}$ c) $\Delta S = 952 J.K^{-1}$ d) $\Delta S = 0 J.K^{-1}$

25. Un électron de charge $q \approx -1,6.10^{-19}$ C et de masse $m \approx 9,1.10^{-31}$ kg, assimilé à un point matériel M, évolue dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ supposé galiléen et muni d'un repère cartésien (O,$\mathbf{e}_x$,$\mathbf{e}_y$,$\mathbf{e}_z$), sous l'action d'un champ électrique $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$ et d'un champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$ tous deux uniformes et stationnaires. On désigne par x, y et z les coordonnées cartésiennes de M dans $\mathcal{R}$, et par $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_z$ la vitesse initiale de M telle que v_0 = 500 $km.s^{-1}$. On place en z_0 = 10 cm un écran d'observation $\mathcal{E}$ parallèle au plan (O,$\mathbf{e}_x$,$\mathbf{e}_y$), destiné à intercepter M.



Dans le cas où B = 0 et E = 10 $V.m^{-1}$, déterminer l'abscisse x_e de M sur $\mathcal{E}$.

a) x_e = 7,2 mm b) x_e = 3,5 mm c) x_e = –3,5 cm d) x_e = –7 cm

26. Dans le cas particulier où E = 0 et B = 10^{-5} T, la trajectoire de M est un cercle de rayon R. Calculer R.

a) R = 10,9 cm b) R = 13,8 cm c) R = 15,1 cm d) R = 28,4 cm

27. Que vaut alors l'abscisse x_m de M sur $\mathcal{E}$?

a) x_m = 1,8 cm b) x_m = 3,8 cm c) x_m = –4,3 cm d) x_m = –6,6 cm

28. En supposant E = 1 $kV.m^{-1}$, déterminer B afin que le mouvement de M soit rectiligne et uniforme.

a) B = 2 T b) B = 2 mT c) B = –4 mT d) B = –200 mT

29. On suppose E et B non nuls et on pose $\omega_c = \frac{qB}{m}$. L'équation différentielle d'évolution de l'abscisse x de M s'écrit sous la forme $\ddot{x} + \omega_c^2 x = a$, où a est une constante indépendante du temps. Déterminer a.

a) $a = \frac{q}{m}(E + v_0 B)$ b) $a = -\frac{q}{m}(E + v_0 B)$ c) $a = \frac{q}{m}(v_0 B - E)$ d) $a = \frac{q}{m}(E - v_0 B)$

30. On suppose $B = \frac{2E}{v_0}$. Exprimer x(t).

a) $x(t) = -\frac{mE}{qB^2}(1 + \cos(\omega_c t))$ b) $x(t) = \frac{mE}{qB^2}(\cos(\omega_c t) - 1)$

c) $x(t) = \frac{mE}{qB^2}(1 - \cos(\omega_c t))$ d) $x(t) = \frac{mE}{qB^2}(1 + \cos(\omega_c t))$

31. On assimile l'objectif d'un appareil photographique à une lentille mince convergente de distance focale image $f'_a = 135\text{mm}$. On désire photographier une toile de maître située à 3 m en avant de l'objectif. A quelle distance p' > 0, en arrière de l'objectif, faut-il placer la pellicule photographique pour obtenir une image nette de la toile ?
a) p' = 93 mm b) p' = 129 mm c) p' = 141 mm d) p' = 245 mm

32. Cet appareil photographique est utilise pour photographier le ciel nocturne. Son format est le 24x36, ce qui signifie que la pellicule photographique mesure 24 mm de hauteur et 36 mm de largeur. Quel est le champ du ciel photographié ?
a) 10°x15° b) 20°x30° c) 32°x48° d) 64°x48°

33. Calculer, en minutes d'arc ('), le diamètre apparent θ du disque lunaire vu par l'objectif de l'appareil photographique. On supposera la Lune sphérique, de rayon 1740 km, et de centre situé à 384000km de l'objectif.
a) θ = 0,086' b) θ = 16' c) θ = 31' d) θ = 1800'

34. Avec cet appareil, on photographie la pleine Lune, l'axe optique de l'objectif étant dirigé vers le centre du disque lunaire. On effectue un tirage de la pellicule sur du papier format 10x15 cm^2. Quel est le diamètre d du disque lunaire sur le papier ?
a) d = 1,4 mm b) d = 5,1 mm c) d = 2,6 mm d) d = 31,0 mm

35. L'objectif d'un projecteur de diapositive est assimilé a une lentille mince convergente qui donne, d'un objet réel, une image inverse et de même dimension, sur un écran placé à 0,2 m de l'objet. Calculer la distance focale image f'_p de cet objectif.

a) $f'_p = 2\text{cm}$ b) $f'_p = 5\text{cm}$ c) $f'_p = 20\text{cm}$ d) $f'_p = 50\text{cm}$

36. Le projecteur précédent forme l'image d'une diapositive de format 24x36 mm^2 sur un écran situé à 4,5 m de distance. Quelle est la taille de l'image sur l'écran ?
a) 1x1,5 m^2 b) 1,7x2,6 m^2 c) 2,1x3,2 m^2 d) 5,4x8,1 m^2