ULC 511

SESSION 2005

Filière MP

MATHÉMATIQUES MPI 1

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 6 heures

L'usage de calculatrice est interdit

Tournez la page S.V.P.

Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ l'algèbre des polynômes en n variables à coefficients réels, c'est-à-dire l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout entier $d \geq 0$ on note $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$ le sous-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d. Une base de ce sous-espace vectoriel est formée des monômes $X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$, où $a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers positifs de somme d. Lorsque $n = 1$, on pose $X = X_1$ et alors $\mathbb{R}[X]_d = \{\alpha X^d | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction. Il est possible d'utiliser les résultats de questions antérieures, même lorsque celles-ci n'ont pas été traitées.

Les parties I, II et III sont indépendantes, sauf mention explicite du contraire.

Partie I

Cette partie étudie un opérateur qui déforme la dérivation des fonctions d'une variable réelle.

On fixe $k \in \mathbb{R}$.

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on note $T(f)$ la fonction définie par

$$T(f)(x) = f'(x) + k\frac{f(x) - f(-x)}{x} \quad \text{pour } x \neq 0.$$

1. a) Démontrer que $T(f)$ se prolonge par continuité en 0 et déterminer $T(f)(0)$.

b) Calculer $T(X^d)$ pour $d \geq 0$ entier.

c) Démontrer que T est une application linéaire et que $\deg T(P) \leq (\deg P) - 1$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

d) Démontrer qu'il existe une unique application linéaire $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\psi(\mathbb{R}[X]_d) \subset \mathbb{R}[X]_d$ pour tout $d \geq 1$;
- pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $(\psi(P))' = \psi(T(P))$;
- $\psi(1) = 1$.

2. Soit M_1 l'ensemble des réels k pour lesquels il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $T(P) = 0$ (on rappelle que l'application T dépend de k).

a) Démontrer que ψ est un isomorphisme si et seulement si $k \notin M_1$.

b) Déterminer M_1 et démontrer que $M_1 \subset \mathbb{R}_-^*$.

Partie II

Dans cette partie, on introduit des déformations des opérateurs différentiels en n variables construites à l'aide du groupe symétrique. On prouve que ces opérateurs commutent entre eux.

On fixe dans la suite un entier $n \geq 2$. On note S_n le groupe symétrique des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. La transposition qui échange i et j est notée (ij). Un élément $w \in S_n$ définit un automorphisme ρ_w de l'algèbre des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ donné par $\rho_w(f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{w(1)}, \ldots, x_{w(n)})$ pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

On note $C^1(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Pour $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit la fonction $D_u(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $D_u(f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu)-f(x)}{t}$. Pour $1 \leq i \neq j \leq n$, on définit la fonction $\Delta_{ij}(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$\Delta_{ij}(f) = \begin{cases} \frac{f-\rho_{(ij)}(f)}{X_i - X_j} & \text{sur } U_{ij} \\ D_{e_i - e_j}(f) & \text{sur } Z_{ij} \end{cases}$$

où Z_{ij} est le fermé de $\mathbb{R}^n$ formé des $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_i = x_j$ et U_{ij} est l'ouvert complémentaire.

On fixe $k \in \mathbb{R}$. On définit $T_u = D_u + k \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (u_i - u_j) \Delta_{ij}$.

1. a) Démontrer que si $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, alors $T_u(f)$ est continue. Démontrer que si $d \geq 1$ et $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$, alors $D_u(f)$ et $T_u(f)$ sont dans $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{d-1}$.

b) Démontrer les égalités suivantes entre endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$:

$$\rho_w \circ \rho_{w'} = \rho_{ww'}, \quad \rho_w \circ D_{e_l} = D_{e_{w(l)}} \circ \rho_w \quad \text{et} \quad \rho_w \circ T_{e_l} = T_{e_{w(l)}} \circ \rho_w$$

pour $1 \leq l \leq n$ et $w, w' \in S_n$.

2. Pour a et b deux éléments de l'anneau des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, on pose $[a, b] = a \circ b - b \circ a$.
Démontrer les égalités suivantes entre endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$:

a) $[D_{e_1} + D_{e_2}, \Delta_{12}] = 0$.

b) $[\Delta_{1i}, \Delta_{2i}] + [\Delta_{1i}, \Delta_{21}] + [\Delta_{12}, \Delta_{2i}] = 0$ pour i entier, $3 \leq i \leq n$.

c) $D_u \circ D_{u'} = D_{u'} \circ D_u$ et $T_u \circ T_{u'} = T_{u'} \circ T_u$ pour tous $u, u' \in \mathbb{R}^n$ (on pourra commencer par le cas $u = e_1$, $u' = e_2$).

Tournez la page S.V.P.

Partie III

Dans cette partie, on compare différentes normes sur les polynômes homogènes.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $||(x_1, \dots, x_n)||^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. On note S l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^n$ de norme 1.

Pour $d \geq 0$, on définit sur $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_d$ la norme

$$||P|| = \sup_{x \in S} |P(x)|.$$

Pour $d \geq 1$, on définit deux autres normes sur $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_d$:

$$||P||_1 = \frac{1}{d} \sup_{u,x \in S} |D_u(P)(x)|$$

$$||P||_D = \frac{1}{d!} \sup_{u_1, \dots, u_d, x \in S} |D_{u_1} \cdots D_{u_d}(P)(x)|$$

où D_u est la dérivée partielle dans la direction u comme dans la partie II.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, X_2]_d$ un polynôme non nul en deux variables avec $d \geq 1$.

a) Démontrer que la fonction $\tilde{P} :]-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $\tilde{P}(\theta) = P(\cos\theta, \sin\theta)$ admet au plus $2d$ zéros.

b) Démontrer que si $|\tilde{P}(\theta)| < 1$ pour tout θ, alors $\tilde{P}'(0) \leq d\sqrt{1 - \tilde{P}(0)^2}$ (on pourra introduire $\beta \in]0, \frac{\pi}{d}[$ tel que $\tilde{P}(0) = \cos(d\beta)$ et appliquer la question précédente à $Q(\theta) = \cos(d\theta) + \tilde{P}(\theta - \beta)$).

c) En déduire que pour tout θ, on a

$$\tilde{P}'(\theta)^2 + d^2 \tilde{P}(\theta)^2 \leq d^2 \sup_{\theta'} \tilde{P}(\theta')^2.$$

d) En déduire que $||P||_1 \leq ||P||$.

2. Soit $d \geq 1$.

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_d$. Démontrer que $\sum_{i=1}^n X_i D_{e_i}(P) = dP$.

b) Démontrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_d$, on a $||P||_1 = ||P||$.

c) Démontrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_d$, on a $||P||_D = ||P||_1$ (on pourra utiliser II.1.a).

Partie IV

Le but de cette partie est d'étudier le noyau commun des T_u.

1. Soit $\phi = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \rho_{(ij)}$, vu comme endomorphisme de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, et soit $N = \frac{n(n-1)}{2}$. Pour $d \geq 0$, on note L_d l'ensemble des valeurs propres de ϕ vu comme endomorphisme de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$. Soit $L = \bigcup_{d \geq 0} L_d$.

a) Démontrer que $\phi \circ \rho_w = \rho_w \circ \phi$ pour tout $w \in S_n$.

b) Démontrer que les éléments de L_d sont rationnels et contenus dans $[-N, N]$, pour tout $d \geq 0$ (on pourra étudier la trace de ϕ sur un sous-espace propre).

c) Démontrer que $(\rho_w)_{w \in S_n}$ est une famille libre d'endomorphismes de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ et que l'espace vectoriel qu'elle engendre est une sous-algèbre de l'algèbre des endomorphismes de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

d) Démontrer que le cardinal de L est inférieur ou égal à $n!$.

2. Soit M l'ensemble des réels k tels qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ non constant vérifiant $T_{e_i}(P) = 0$ pour tout i (on rappelle que T_{e_i} a été défini à la partie II et qu'il dépend de k).

Soit k un réel. Pour $d \geq 1$ entier, on définit l'endomorphisme $\gamma_d = (d + kN)\mathrm{Id} - k\phi$ de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

a) Déduire de III.2.a que $\sum_{i=1}^{n} X_i T_{e_i}(P) = \gamma_d(P)$ pour tous $d \geq 1$ et $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$.

b) En déduire que $M \subseteq \{\frac{d}{\lambda - N} | \lambda \in L, \lambda \neq N, d \in \mathbb{N}^*\}$.

3. Soient $k \geq 0$ réel et $d \geq 1$ entier.

a) Démontrer que γ_d est inversible.

b) Démontrer qu'il existe une unique famille $(c_d(w))_{w \in S_n}$ de réels telle que $\gamma_d^{-1} = \sum_{w \in S_n} c_d(w) \rho_w$.

c) Démontrer que pour tous $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{w \in S_n} c_d(w) \sum_{i=1}^{n} \Big(X_i T_{e_i}(P) \Big)(x_{w(1)}, \ldots, x_{w(n)}).$$

d) Démontrer que $\sum_{w \in S_n} c_d(w) = \frac{1}{d}$.

e) Démontrer que $c_d(w) \geq 0$ pour tout $w \in S_n$.

Partie V

On construit un endomorphisme de l'espace des polynômes qui entrelace T_u et D_u et on étudie sa norme.

1. Soit k un réel.

a) Soit $d \geq 0$. Soient $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$ tels que $D_{e_i}(P_j) = D_{e_j}(P_i)$ pour tous i, j. Démontrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{d+1}$ tel que pour tout i, on ait $P_i = D_{e_i}(P)$.

Tournez la page S.V.P.

b) En déduire qu'il existe un unique endomorphisme d'espace vectoriel ψ de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $\psi(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d) \subset \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$ pour tout $d \geq 0$, $\psi(1) = 1$ et $D_u \circ \psi = \psi \circ T_u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.

c) Démontrer que ψ est un isomorphisme si et seulement si $k \notin M$ (cf IV.2 pour la définition de M).

2. On suppose dans cette question $k \geq 0$ et on reprend les notations de la partie III. On pose $\chi = \psi^{-1}$. Pour $d \geq 1$, on définit une norme sur $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$:

$$||P||_T = \frac{1}{d!} \sup_{u_1, \ldots, u_d, x \in S} |T_{u_1} \cdots T_{u_d}(P)(x)|.$$

a) Démontrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$ avec $d \geq 1$, on a $||P|| \leq ||P||_T$ (utiliser IV.3.c).

b) Démontrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$ avec $d \geq 1$, on a $||\chi(P)||_T = ||P||_D$.

c) En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$ avec $d \geq 0$, on a $||\chi(P)|| \leq ||P||$.

Partie VI

Cette partie est consacrée à l'étude des fonctions propres des T_u.

On note B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ et $B^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x|| < 1\}$ son intérieur.

1. Soit $(f_d)_{d \geq 0}$ une suite de polynômes avec $f_d \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$. On suppose que la série $\sum_{d=0}^{\infty} ||f_d||$ est convergente.

a) Démontrer que $\sum_{d=0}^{\infty} f_d$ converge uniformément et absolument sur B vers une fonction f qui est continue sur B et C^∞ sur B°.

b) Démontrer que si $f = 0$ sur B°, alors $f_d = 0$ pour tout $d \geq 0$.

2. Soit H l'ensemble des fonctions $f : B^\circ \to \mathbb{R}$ de la forme $f = \sum_{d=0}^{\infty} f_d$ où $f_d \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$ et la série $\sum_{d=0}^{\infty} ||f_d||$ est convergente. On pose $||f|| = \sum_{d=0}^{\infty} ||f_d||$.

a) Démontrer que H est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions $B^\circ \to \mathbb{R}$ et que c'est une algèbre normée unitaire complète.

b) Soit $k \geq 0$. Démontrer que χ s'étend en un endomorphisme continu de H par $\chi(f) = \sum_{d=0}^{\infty} \chi(f_d)$ pour $f = \sum_{d=0}^{\infty} f_d$.

3. Soit $k \geq 0$. Soit $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On considère le système d'équations

$$(1) \qquad T_{e_i}(f) = y_i f \text{ pour tout } i, \text{ avec condition initiale } f(0) = 1$$

d'inconnue $f \in H$ (on a étendu les définitions de la partie II aux fonctions de classe C^1 de B° dans $\mathbb{R}$).

a) Démontrer que $E_y = \chi(\exp(\sum_{i=1}^{n} y_i X_i))$ est l'unique solution du système (1).

b) Démontrer que E_y s'étend en une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $T_{e_i}(f) = y_i f$ pour tout i.

4. Relier les résultats de la partie I à ceux de la suite du problème.