ULC 522

SESSION 2005

Filière MP (groupes MP/MPI et groupe I)

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Filières MP PC (groupe I)

Épreuve optionnelle commune aux ENS de Paris et Lyon

MATHÉMATIQUES MPI 2

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Tournez la page S.V.P.

Notations

Dans tout le problème, on notera $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur $[0,1]$ et continues par morceaux. On rappelle que $g \in \mathcal{C}$ signifie qu'il existe une subdivision de $[0,1]$, $\{0 = x_1 < \cdots < x_N = 1\}$ telle que pour $i \in \{1, \cdots, N-1\}$, g soit continue sur chaque intervalle de la forme $]x_i, x_{i+1}[$, et qu'en plus g admette des limites finies $g(x_i + 0)$ et $g(x_{i+1} - 0)$ à gauche et à droite de chacun de ces intervalles.

Par ailleurs, on définit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions réelles f continues sur $[0,1]$ et de classe C^1 par morceaux. Cela signifie qu'il existe une subdivision de $[0,1]$, $\{0 = x_1 < \cdots < x_N = 1\}$ telle que pour $i \in \{1, \cdots, N-1\}$, f soit continûment dérivable sur chaque intervalle de la forme $]x_i, x_{i+1}[$, et qu'en plus f' admette des limites finies $f'(x_i+0)$ et $f'(x_{i+1}-0)$ à gauche et à droite de chacun de ces intervalles.

Dans ces deux cas la partition $\{0 = x_1 < \cdots < x_N = 1\}$ de $[0,1]$ est appelée *partition subordonnée* à f (ou à g). On remarquera qu'il n'y a pas qu'une seule partition subordonnée à une fonction f donnée.

Enfin, on note $\mathcal{D}_0 = \{u \in \mathcal{D} \text{ tel que } u(0) = u(1) = 0\}$.

Partie I

1.a Soit $f \in \mathcal{D}$. Démontrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}$ telle que

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = f(0) + \int_0^x g(s)\, ds. \tag{1}$$

Réciproquement, montrer que si $g \in \mathcal{C}$, la fonction f définie par

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \int_0^x g(s)\, ds,$$

est un élément de $\mathcal{D}$.

1.b Soient $f \in \mathcal{D}$ et $g \in \mathcal{C}$ vérifiant (1). Montrer que si l'on note $\{x_1, \cdots, x_N\}$ une partition subordonnée à f, alors g est définie de manière unique sur $\cup_{i=1}^{N-1}]x_i, x_{i+1}[$. Dans toute la suite du problème, une fonction $g \in \mathcal{C}$ vérifiant

(1) sera appelée **une dérivée** de f. Pour $f \in \mathcal{D}$, on désignera par f' une dérivée de f.

1.c Montrer que si f_1 et f_2 sont deux fonctions de $\mathcal{D}$ possédant respectivement des dérivées g_1 et g_2, alors le produit $f_1 f_2$ appartient à $\mathcal{D}$ et admet $f_1 g_2 + f_2 g_1$ pour dérivée.

2. Soit $g \in \mathcal{C}$. Démontrer que

$$\int_0^1 g(x)^2\,dx \geq \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2.$$

Montrer aussi qu'il y a égalité si et seulement si il existe une constante C telle que $g(x) = C$ sauf éventuellement en un nombre fini de points x de $[0,1]$.

3. Soit $g \in \mathcal{C}$. Montrer que la fonction f définie par

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \int_0^x g(s)\,ds - x\int_0^1 g(s)\,ds,$$

appartient à l'ensemble $\mathcal{D}_0$.

4. Soit $g \in \mathcal{C}$, démontrer que g vérifie

$$\forall \theta \in \mathcal{D}_0,\ \int_0^1 g(s)\theta'(s)\,ds = 0$$

si et seulement si il existe une constante C telle que $g(x) = C$ sauf éventuellement en un nombre fini de points x de $[0,1]$.

5. Soient $f, g \in \mathcal{C}$ vérifiant

$$\forall \theta \in \mathcal{D}_0,\ \int_0^1 \left(f(s)\theta'(s) + g(s)\theta(s)\right)\,ds = 0.$$

Montrer qu'alors il existe $\tilde{f} \in \mathcal{D}$ telle que f coïncide avec $\tilde{f}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points et que

$$\forall x \in [0,1],\ \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) + \int_0^x g(s)\,ds.$$

Observer que si de plus $g \in C^0([0,1])$ alors $\tilde{f} \in C^1([0,1])$.

Partie II

Pour tout $u \in \mathcal{D}_0$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on note

$$E_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2\,dx + \frac{\lambda}{4}\int_0^1 (1-(u(x))^2)^2\,dx.$$

1. Montrer que $E_\lambda(u)$ est bien définie pour $u \in \mathcal{D}_0$ et qu'en particulier sa valeur ne dépend pas du choix possible de u' parmi les dérivées de u.

A partir de maintenant, et jusqu'à la fin du problème, on admettra que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, le problème de minimisation

$$\min_{u\in\mathcal{D}_0} E_\lambda(u), \tag{2}$$

a au moins une solution que l'on notera u_λ. Ainsi, u_λ vérifie

$$\begin{cases} u_\lambda \in \mathcal{D}_0, \\ \forall v \in \mathcal{D}_0,\ \ E_\lambda(v) \geq E_\lambda(u_\lambda). \end{cases}$$

Le but du problème est d'étudier u_λ et en particulier son comportement lorsque λ tend vers $+\infty$.

2.a Soit $\psi \in \mathcal{D}_0$. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0 \text{ et } \varepsilon\neq 0} \frac{E_\lambda(u_\lambda+\varepsilon\psi)-E_\lambda(u_\lambda)}{\varepsilon} = \int_0^1 u_\lambda'(x)\psi'(x)-\lambda(1-(u_\lambda(x))^2)u_\lambda(x)\psi(x)\,dx.$$

2.b En déduire que u_λ vérifie

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_0,\ \int_0^1 u_\lambda'(x)\psi'(x)-\lambda(1-(u_\lambda(x))^2)u_\lambda(x)\psi(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

2.c Montrer que u_λ' coïncide avec une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. En déduire que u_λ est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ et que sa dérivée au sens classique vérifie encore (3). Montrer enfin que u_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation différentielle

$$-u_\lambda''(x) = \lambda(1-(u_\lambda(x))^2)u_\lambda(x),$$

sur $]0,1[$, puis que u_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$.

2.d Montrer qu'il existe une constante $C_\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in]0,1[,\ (u'_\lambda(x))^2 = \frac{\lambda}{2}\left(((u_\lambda(x))^2 - 1)^2 - C_\lambda\right).$$

2.e Montrer que $C_\lambda \in [0,1]$. Montrer ensuite que

$$\forall x \in [0,1],\ u_\lambda(x)^2 < 1.$$

3. En considérant, pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, la fonction $v(x)$ définie par

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\varepsilon} \text{ si } x \in [0,\varepsilon], \\ 1 \text{ si } x \in]\varepsilon, 1-\varepsilon[, \\ \dfrac{1-x}{\varepsilon} \text{ si } x \in [1-\varepsilon, 1], \end{cases}$$

montrer qu'il existe une constante C indépendante de λ telle que pour tout λ suffisamment grand,

$$E_\lambda(u_\lambda) \leq C\sqrt{\lambda}.$$

En constatant que pour tout $u \in \mathcal{D}_0$, $E_\lambda(u) = E_\lambda(-u)$, en déduire qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour $\lambda \geq \lambda_0$, la solution u_λ du problème de minimisation (2) n'est pas unique.

4.a Montrer que si l'on pose $\phi_\lambda = u_\lambda^2$, alors

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^1 (\phi_\lambda(x) - 1)^2\, dx = 0.$$

4.b Soit $\mu_\lambda = \max_{x \in [0,1]} |u_\lambda(x)|$. Montrer que

$$(\mu_\lambda^2 - 1)^2 \leq \int_0^1 (\phi_\lambda(x) - 1)^2\, dx,$$

puis que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mu_\lambda = 1.$$

Tournez la page S.V.P.

Partie III

Dans cette partie, on considère une famille de fonctions $(v_\lambda)_{\lambda>0}$ de $\mathcal{D}_0$ vérifiant

$$\exists C > 0,\ \forall \lambda > 0,\ E_\lambda(v_\lambda) \leq C\sqrt{\lambda}.$$

1. Justifier le fait qu'une telle famille existe.

2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\forall \varepsilon > 0$,

$$\varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2 \geq 2xy.$$

En déduire que

$$E_\lambda(v_\lambda) \geq \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^1 |v_\lambda'(x)(1 - v_\lambda^2(x))|\, dx.$$

3. On pose $\eta_\lambda = \max_{x\in[0,1]} |v_\lambda(x)|$, et on définit la fonction F de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ par

$$F(\theta) = \begin{cases} \theta - \dfrac{\theta^3}{3} & \text{si } 0 \leq \theta \leq 1, \\ \dfrac{4}{3} + \dfrac{\theta^3}{3} - \theta & \text{si } \theta \geq 1. \end{cases}$$

En constatant que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^+,\ F'(\theta) = |1 - \theta^2|,$$

montrer que

$$E_\lambda(v_\lambda) \geq \sqrt{2\lambda} F(\eta_\lambda).$$

4. Déduire des questions précédentes que

$$\lim_{\lambda_0 \to +\infty} \inf_{\lambda \geq \lambda_0} \frac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Partie IV

1. Résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} -\psi''(x) = (1-\psi^2(x))\psi(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \\ \psi(0) = 0, \\ \psi'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Vérifier que

$$\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = 1.$$

2. On pose pour $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$,

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right), & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \\ \psi\left(\dfrac{1-x}{\varepsilon}\right), & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

où ψ est la solution de la question précédente.

Calculer $E_\lambda(\psi_\varepsilon)$. Montrer en choisissant convenablement ε que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{E_\lambda(u_\lambda)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

3. On considère une subdivision de $[0,1]$ de la forme $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$. Sur cette subdivision, on définit la fonction U par

$$\begin{array}{l} \forall n \in \{1, \cdots, N-1\},\ U|_{[x_n, x_{n+1}[} = (-1)^n, \\ U(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} U(x). \end{array}$$

On considère enfin une famille de fonctions U_λ vérifiant

$$\begin{array}{l} \forall \lambda > 0,\ U_\lambda \in \mathcal{D}_0, \\ \exists C > 0,\ \forall \lambda > 0, E_\lambda(U_\lambda) \leq C\sqrt{\lambda}, \\ \forall n \in \{1, \cdots, N-1\},\ \forall x \in]x_n, x_{n+1}[,\ \lim\limits_{\lambda \to +\infty} U_\lambda(x) = U(x). \end{array} \tag{4}$$

3.a Montrer qu'une telle famille existe.

3.b Montrer que

$$\lim_{\lambda_0 \to +\infty} \inf_{\lambda \geq \lambda_0} \frac{E_\lambda(U_\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \geq \frac{2(N-1)\sqrt{2}}{3}.$$

3.c Construire une famille de fonctions V_λ vérifiant les hypothèses (4) telle que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{E_\lambda(V_\lambda)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2(N-1)\sqrt{2}}{3}.$$