SESSION 2001

Filière Physique – Chimie

MATHÉMATIQUES

(Épreuve commune aux ENS : Ulm, Lyon et Cachan)

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans documents d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Tournez la page S.V.P.

Avertissement : Les labels **Qn**, avec $0 \leq n \leq 13$ indiquent les questions, certaines d'entre elles étant découpées en sous-questions numérotées de 1 à j, avec $j \leq 5$.

Notations

On désigne par R le corps des nombres réels. Le problème concerne l'étude des matrices carrées à coefficients réels, dont l'ensemble est noté $M_n(\mathrm{R})$. La matrice identité est notée I_n. On notera $O(n)$ le groupe orthogonal et $S(n)$ l'ensemble des matrices symétriques réelles à n lignes. Rappelons que $O(n)$ est l'ensemble des matrices M de $M_n(\mathrm{R})$ qui satisfont ${}^tMM = I_n$ ou, ce qui revient au même, $M\,{}^tM = I_n$. Si $M \in M_n(\mathrm{R})$, on note P_M le polynôme caractéristique de M, défini par $P_M(X) = \det(XI_n - M)$.

On identifie canoniquement les vecteurs de R^n aux matrices colonnes à n lignes. En particulier, $M_1(\mathrm{R})$ est identifié à R.

On dit que P, appartenant à $M_n(\mathrm{R})$, est une matrice de permutation s'il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, telle que $p_{ij} = 1$ si $i = \sigma(j)$, $p_{ij} = 0$ sinon.

Q1 Soit $D \in M_n(\mathrm{R})$ une matrice diagonale, $x \in \mathrm{R}^n$ un vecteur et $a \in \mathrm{R}$ un nombre. On forme une matrice $N \in M_{n+1}(\mathrm{R})$ par

$$N = \begin{pmatrix} & & x_1 \\ & D & \vdots \\ & & x_n \\ x_1 \cdots x_n & & a \end{pmatrix}.$$

1. On note $d_1, \ldots, d_n$ les coefficients diagonaux de D. Montrer que

$$P_N(X) = \left(X - a - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{X - d_j} \right) P_D(X).$$

2. On suppose que $d_1 < d_2 < \cdots < d_n$ et que $x_j \neq 0$ pour tout j. Etudier les variations de la fonction $t \mapsto P_N(t)/P_D(t)$. En déduire que les valeurs propres $\mu_0, \ldots, \mu_n$ de N sont réelles et que, rangées dans l'ordre croissant, elles satisfont

$$\mu_0 < d_1 < \mu_1 < \cdots < d_n < \mu_n.$$

On admettra que, dans le cas général (les x_j pouvant s'annuler, et $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$), on a encore

$$\mu_0 \leq d_1 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq d_n \leq \mu_n.$$

Q2 Réciproquement, soit D comme ci-dessus avec $d_1 \leq \cdots \leq d_n$. On se donne des nombres réels $\mu_0, \ldots, \mu_n$, satisfaisant

$$\mu_0 \leq d_1 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq d_n \leq \mu_n.$$

1. Montrer que la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{\prod_{l=0}^{n}(X-\mu_l)}{\prod_{j=1}^{n}(X-d_j)}$$

n'a que des pôles simples, qu'on identifiera.

2. En déduire qu'il existe des nombres $c_j \in \mathrm{R}$ tels que

$$F(X) = X - a + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{X-d_j}, \quad \text{où} \quad a = \sum_{l=0}^{n} \mu_l - \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

3. On commence par le cas simple où $d_1 < d_2 < \cdots < d_n$. Montrer que chaque c_j est négatif ou nul.

4. Dans le cas général, montrer qu'on peut choisir les c_j négatifs ou nuls.

5. En déduire qu'il existe un vecteur $x \in \mathrm{R}^n$ tel que les nombres $\mu_0, \ldots, \mu_n$ soient les valeurs propres de la matrice N définie à la question Q1.

Q3 Soit $M \in S(n)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, rangées dans l'ordre croissant.

1. Soit $x \in \mathrm{R}^n$ un vecteur et $a \in \mathrm{R}$ un nombre. Soit $\mu_0, \ldots, \mu_n$ les valeurs propres, rangées dans l'ordre croissant, de

$$N = \begin{pmatrix} & & x_1 \\ & M & \vdots \\ & & x_n \\ x_1 & \cdots\ x_n & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\mu_0 \leq \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \mu_n.$$

2. Réciproquement, soit $\mu_0, \ldots, \mu_n$ des nombres réels satisfaisant

$$\mu_0 \leq \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \mu_n.$$

Montrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathrm{R}^n$ et un nombre $a \in \mathrm{R}$, tels que $\mu_0, \ldots, \mu_n$ soient les valeurs propres de la matrice N définie au 1.).

Spectre et diagonale des matrices symétriques

Pour $n \geq 1$, $C(n)$ désigne l'ensemble des suites *croissantes* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de n nombres réels. Si $a \in C(n)$ et $1 \leq k \leq n$, on note $s_k(a) = a_1 + \cdots + a_k$. Si $a, b \in C(n)$, on dit que b *majore* a, et on note $a \prec b$, si

- $s_k(a) \leq s_k(b)$, pour tout $k = 1, \ldots, n-1$,
- $s_n(a) = s_n(b)$.

Q4 Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $C(n)$.

Tournez la page S.V.P.

Q5 Soit $a \in C(n)$ et $\alpha = \frac{1}{n} s_n(a)$. Montrer que $a \prec b$, où $b = (\alpha, \ldots, \alpha)$.

Q6 Si M appartient à $S(n)$, on note diag(M) la liste de ses coefficients diagonaux, rangés dans l'ordre croissant, et spec(M) celle de ses valeurs propres, rangées dans l'ordre croissant.

Montrer que spec$(M) \prec$ diag(M). On pourra faire une récurrence sur n.

Q7 Soit $n \geq 2$ et $a, b \in C(n)$, vérifiant $a \prec b$. Notons Δ le sous-ensemble de $C(n-1)$ formé des suites d qui vérifient

- $a_1 \leq d_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq d_{n-1} \leq a_n$,
- $s_k(d) \leq s_k(b)$ pour tout $k = 1, \ldots, n-1$.

1. Montrer que Δ est un compact non vide de R^{n-1}. En déduire qu'il existe un d^* dans Δ tel que $s_{n-1}(d^*) \geq s_{n-1}(d)$ pour tout $d \in \Delta$.
2. On définit un entier r de la façon suivante : si pour tout j compris entre 1 et $n-1$, $s_j(d^*) < s_j(b)$, on pose $r = 0$. Sinon, r est le plus grand entier entre 1 et $n-1$ tel que $s_r(d^*) = s_r(b)$.
   (a) Montrer que $d_j^* = a_{j+1}$ pour tout $j > r$.
   (b) En déduire que $s_{n-1}(d^*) \geq s_{n-1}(b)$.
   (c) Conclure qu'il existe $c \in C(n-1)$ telle que $a_1 \leq c_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq c_{n-1} \leq a_n$ et $c \prec \beta$, où $\beta = (b_1, \ldots, b_{n-1})$.

Q8 Montrer, par récurrence sur n, que si $\delta, \lambda \in C(n)$ satisfont $\lambda \prec \delta$, alors il existe $M \in S(n)$ telle que $\delta =$ diag(M) et $\lambda =$ spec(M).

Matrices doublement stochastiques

On dit qu'une matrice $M \in M_n(\mathrm{R})$ est *doublement stochastique* si

- ses coefficients m_{ij} sont positifs ou nuls,
- $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$ pour tout i,
- $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 1$ pour tout j.

On note e le vecteur de R^n dont toutes les composantes valent un. On désigne par DS_n l'ensemble des matrices doublement stochastiques.

Si $x \in \mathrm{R}^n$, on désigne par $\hat{x}$ la suite des coordonnées de x, rangées dans l'ordre croissant ; on a $\hat{x} \in C(n)$. Si $x, y \in \mathrm{R}^n$, on convient de noter encore $x \prec y$ lorsque $\hat{x} \prec \hat{y}$.

Q9 Soit $M \in DS_n$.

1. Montrer que e est un vecteur propre de M et de ${}^tM$.
2. Soit P une matrice de permutation. Montrer que PM et MP appartiennent à DS_n.

Q10 Soit $M \in M_n(\mathrm{R})$. On suppose que $x \prec Mx$ pour tout $x \in \mathrm{R}^n$. Montrer que $M \in DS_n$.

Q11 Soit $a, b \in C(n)$, satisfaisant

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j - t| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j - t|, \quad \forall t \in \mathrm{R}.$$

1. Montrer d'abord que $s_n(a) = s_n(b)$.
2. Choisissant t dans l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, montrer alors que $s_k(a) \leq s_k(b)$.
3. En déduire que si $x, y \in \mathrm{R}^n$ satisfont

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j - t| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j - t|, \quad \forall t \in \mathrm{R},$$

alors $x \prec y$.

Q12 On munit R^n de la norme

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

Soit $M \in DS_n$.

1. Montrer que $\|Mx\| \leq \|x\|$, pour tout $x \in \mathrm{R}^n$.
2. Appliquer cette inégalité et la question Q11.3 pour montrer que $x \prec Mx$ pour tout $x \in \mathrm{R}$.

Q13

1. Soit $U \in O(n)$. On définit une matrice $A \in M_n(\mathrm{R})$ par $a_{ij} = u_{ij}^2$. Montrer que $A \in DS_n$.
2. Soit $x, y \in \mathrm{R}^n$ deux vecteurs tels que $x \prec y$. Utilisant le 1.) et la question Q8, montrer qu'il existe une matrice $A \in DS_n$ telle que $y = Ax$.