ULC 221 J.2028

SESSION 2002

Filière PC

(Epreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan)

MATHEMATIQUES

DUREE : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Tournez la page S.V.P.

Avertissement. On attachera la plus grande importance à la clarté et à la précision des démonstrations, ainsi qu'à la présentation des copies.

Dans ce problème, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction continue, 2π-périodique. On examine certaines propriétés des solutions de l'équation différentielle

$$(H) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + qu = 0.$$

Nous étudions ensuite comment ces propriétés varient dans le cas de l'équation

$$(H\lambda) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + (q+\lambda)u = 0,$$

paramétrée par $\lambda \in \mathbb{R}$. Par "solution de (H) ou de (Hλ)", nous entendons des solutions de classe $\mathcal{C}^2$, définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Nous dirons qu'une solution u de (H) ou de (Hλ) n'est pas nulle s'il existe t tel que $u(t) \neq 0$.

Propriétés élémentaires

On rappelle que, d'après le cours, il existe une et une seule solution u de (Hλ) qui prenne, ainsi que sa dérivée, des valeurs prescrites a et b en un point donné x_0 : $u(x_0) = a$, $u'(x_0) = b$. Utilisant ce résultat, nous notons u_0, u_1 les solutions de (H) définies par les conditions

$$u_0(0) = u_1'(0) = 1, \quad u_0'(0) = u_1(0) = 0,$$

et nous formons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} u_0(2\pi) & u_1(2\pi) \\ u_0'(2\pi) & u_1'(2\pi) \end{pmatrix},$$

dont la trace $u_0(2\pi) + u_1'(2\pi)$ est notée D.

Q1. Montrer que $u_0u_1' - u_0'u_1$ est une fonction constante, égale à un.

Q2. Montrer que, pour toute solution de (H), à valeurs complexes, on a

$$\begin{pmatrix} u(2\pi) \\ u'(2\pi) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, donner une expression de

$$\begin{pmatrix} u(2k\pi) \\ u'(2k\pi) \end{pmatrix}$$

lorsque $k \in \mathbb{Z}$.

Q3.

1. Lorsque $|D| \neq 2$, montrer que M est diagonalisable.
2. Plus généralement, discuter la position des valeurs propres de M dans le plan complexe, suivant la valeur de $D^2 - 4$.

Q4.

1. Soit $U \in \mathbb{C}^2$ un vecteur. Montrer qu'il existe une et une seule application $k \mapsto X^k$, définie sur $\mathbb{Z}$ (on dira "une suite") et à valeurs dans $\mathbb{C}^2$, vérifiant $X^{k+1} = MX^k$ et $X^0 = U$.
2. Cas $|D| < 2$. Montrer qu'une telle suite est toujours bornée.
3. Cas $|D| > 2$. Montrer qu'une telle suite, lorsque $U \neq 0$, ne peut pas être bornée.
4. Cas $|D| = 2$. Montrer qu'au moins une telle suite, avec $U \neq 0$, est bornée et que, pour que toutes ces suites soient bornées, il faut et il suffit que M soit égale à $\pm I_2$ (I_2 est la matrice identité).

Q5. On suppose que $|D| < 2$.

1. Montrer qu'il existe une solution non nulle de (H) de la forme $t \mapsto e^{i\alpha t}w(t)$, où w est une fonction 2π-périodique et $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. En déduire que toutes les solutions de (H) sont bornées.

Nombre de zéros des solutions réelles de (H)

Nous dirons qu'un nombre réel t est un *zéro* d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si $f(t) = 0$. Les solutions à valeurs réelles sont appelées *solutions réelles.*

Q6. Soient $y_0, y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux solutions réelles de (H), linéairement indépendantes. Nous notons y la fonction $y_0 + iy_1$ (avec $i = \sqrt{-1}$). C'est une autre solution, à valeurs complexes.

1. Montrer que y ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$.
2. En déduire qu'il existe des fonctions $\rho > 0$ et ϕ, réelles et de classe $\mathcal{C}^2$, telles que $y = \rho e^{i\phi}$.
3. Montrer que $\rho^2\phi'$ est une constante non nulle.
4. Montrer que la forme générale des solutions à valeurs réelles de (H) est

$$u = A\rho\cos(\phi - \phi_0), \quad A \in \mathbb{R},\ \phi_0 \in \mathbb{R}.$$

Tournez la page S.V.P.

5. En déduire que, si l'une des solutions réelles non nulles de (H) s'annule une infinité de fois, alors toutes les solutions réelles de (H) en font autant.

Q7. On suppose dans cette question que $|D| < 2$. Montrer que toute solution réelle de (H) s'annule une infinité de fois. Pour cela, on considèrera une solution non nulle de la forme $y = e^{i\alpha t}w(t)$, où w est une fonction 2π-périodique (voir la question Q5). On notera y_0 et y_1 ses parties réelle et imaginaire et on utilisera la question Q6.

Q8. On suppose qu'il existe une solution réelle de (H) qui ne s'annule qu'en un nombre fini de points.

1. Montrer qu'il existe une solution réelle ϕ de (H), et un nombre réel $\beta > 0$, tels que
   (a) $\phi(t + 2\pi) = \beta\phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   (b) $\phi(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $D \geq 2$.
3. On note $\sigma = \log \phi$. Calculer $\sigma'' + (\sigma')^2 + q$ et vérifier que σ' est 2π-périodique. En déduire que
$$\int_0^{2\pi} q(t)\, dt \leq 0.$$
   Dans quel cas a-t-on l'égalité ?
4. Montrer que pour toute fonction $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^2$, on a
$$\int_0^{2\pi} qw^2 dt \leq \int_0^{2\pi} (w')^2 dt.$$
   A quelle condition sur w a-t-on l'égalité ?

Q9. On suppose qu'il existe une solution non nulle w, réelle et 2π-périodique, de (H). Montrer que si $\lambda > 0$, toutes les solutions réelles de (Hλ) s'annulent une infinité de fois.

Q10. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

- Il existe une solution de (H) qui ne s'annule qu'en un nombre fini de points,
- toute solution non nulle de (H) ne s'annule qu'en un nombre fini de points.

Q11. On suppose que les solutions réelles non nulles de (H) ne s'annulent qu'en un nombre fini de points. Soit ϕ comme en Q8.1. Etant donné un nombre $\lambda < 0$, on désigne par ψ la solution de (Hλ) qui satisfait les mêmes conditions initiales que ϕ :
$$\psi(0) = \phi(0), \quad \psi'(0) = \phi'(0).$$

1. Montrer l'identité
$$\phi\psi' - \phi'\psi + \lambda \int_0^t \phi\psi\, dx = 0.$$

2. Soit $t_0 \in \mathbb{R}^*$ un zéro de ψ, tel que ψ ne s'annule pas entre 0 et t_0. On souhaite établir une contradiction. Au moyen de l'identité ci-dessus, montrer que $t_0 \psi'(t_0)$ est strictement positif. Puis, considérant les variations de ψ, montrer que ce nombre est négatif.

3. En déduire que les solutions réelles non nulles de (Hλ) ne s'annulent qu'un nombre fini de fois.

Q12. On suppose que $q(t) < 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer par un argument de convexité que les solutions réelles non nulles de (H) s'annulent au plus une fois.

Q13.

1. Finalement, montrer qu'il existe un nombre réel λ_0, unique, satisfaisant les propriétés suivantes :

   (a) pour $\lambda < \lambda_0$, les solutions réelles non nulles de (Hλ) ne s'annulent qu'un nombre fini de fois,

   (b) pour $\lambda > \lambda_0$, les solutions réelles de (Hλ) s'annulent une infinité de fois,

2. Montrer les inégalités

$$- \max_{t \in [0,2\pi]} q(t) \leq \lambda_0 \leq -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t)\, dt.$$

Etude de (Hλ_0)

Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, on désigne par $u_{0\lambda}$ et $u_{1\lambda}$ les solutions de (Hλ) qui vérifient

$$u_{0\lambda}(0) = u'_{1\lambda}(0) = 1, \quad u'_{0\lambda}(0) = u_{1\lambda}(0) = 0,$$

et nous formons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} u_{0\lambda}(2\pi) & u_{1\lambda}(2\pi) \\ u'_{0\lambda}(2\pi) & u'_{1\lambda}(2\pi) \end{pmatrix},$$

dont la trace $u_{0\lambda}(2\pi) + u'_{1\lambda}(2\pi)$ est notée $D(\lambda)$. On admet que les applications $(\lambda, t) \mapsto u_{j\lambda}(t)$ et $(\lambda, t) \mapsto u'_{j\lambda}(t)$ sont continues, pour $j = 1, 2$.

Q14. Montrer que $D(\lambda_0) \geq 2$.

Q15. D'après les questions Q8 et Q13, on sait que, pour $\lambda < \lambda_0$, il existe une solution ϕ_λ de (Hλ), réelle, strictement positive, et un nombre $\beta(\lambda) > 0$ tel que $\phi_\lambda(t + 2\pi) = \beta(\lambda)\phi_\lambda(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'on peut choisir ϕ_λ sous la forme

$$a(\lambda)u_{0\lambda} + b(\lambda)u_{1\lambda}$$

   avec $|a(\lambda) + ib(\lambda)| = 1$.

2. Montrer qu'il existe une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $\mu_n < \lambda_0$, convergente vers λ_0, telle que $a(\mu_n) + ib(\mu_n)$ converge vers une limite, qu'on notera $a_0 + ib_0$.

Tournez la page S.V.P.

3. Définissons $\psi = a_0 u_{0\lambda_0} + b_0 u_{1\lambda_0}$. Vérifier que ψ est une solution non nulle de $(\mathrm{H}\lambda_0)$ dont les valeurs sont strictement positives.

4. Montrer qu'il existe un nombre réel $\beta_0 > 0$ tel que $\psi(t + 2\pi) = \beta_0 \psi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Q16. On garde les notations de la question précédente, et on suppose que $\beta_0 \neq 1$.

1. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I, contenant λ_0, et une application continue $\beta : I \to \mathbb{R}$, telle que $\beta(\lambda)^2 - D(\lambda)\beta(\lambda) + 1 = 0$ et $\beta(\lambda_0) = \beta_0$.

2. Vérifier que $M(\lambda_0) \neq \beta_0 I_2$. Construire alors une application $\lambda \mapsto (A(\lambda), B(\lambda))$, de I dans $\mathbb{R}^2$, telle que

$$\begin{pmatrix} A(\lambda) \\ B(\lambda) \end{pmatrix}$$

soit un vecteur propre de $M(\lambda)$, pour la valeur propre $\beta(\lambda)$.

3. Considérons, pour $\lambda > \lambda_0$, $\lambda \in I$, la solution $\phi^\lambda = A(\lambda) u_{0\lambda} + B(\lambda) u_{1\lambda}$ de $(\mathrm{H}\lambda)$. Montrer que ϕ^λ s'annule au moins une fois dans $[0, 2\pi]$.

Q17. En déduire que $\beta_0 = 1$. Qu'en déduisez-vous sur $D(\lambda_0)$?

Q18. Montrer que, si

$$\lambda_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t)\, dt,$$

alors q est une fonction constante.