ULC 421

SESSION 2004

Filière PC

MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Tournez la page S.V.P.

Avertissement. On attachera la plus grande importance à la clarté et à la précision des démonstrations, ainsi qu'à la présentation des copies.

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbb{Q}$ celui des nombres rationnels. L'ensemble des nombres entiers positifs est $\mathbb{N}$. La partie entière d'un nombre réel positif x est l'entier naturel $[x]$ ayant la propriété $[x] \leq x < [x] + 1$.

Le problème décrit la représentation d'un nombre réel en *fraction continuée*, qu'on appelle aussi "fraction continue". Pour cela, on introduit une notation : si $a_0, a_1, ..., a_N$ sont des nombres réels strictement positifs, et si $0 \leq n \leq N$, on note

$$F[a_0, a_1, ..., a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

C'est un nombre réel positif. Par exemple,

$$F[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad F[a_0, a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}.$$

Q1. Vérifiez les formules suivantes, pour $1 \leq m \leq n \leq N$:

$$F[a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n] = F\left[a_0, a_1, ..., a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right], \quad F[a_0, a_1, ..., a_n] = F[a_0, F[a_1, ..., a_n]]$$

et

$$F[a_0, a_1, ..., a_n] = F[a_0, a_1, ..., a_{m-1}, F[a_m, a_{m+1}, ..., a_n]].$$

Convergentes d'une fraction continue

Définissons les nombres p_n et q_n par récurrence (finie pour l'instant) :

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_1 a_0 + 1, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

et

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Les "convergentes" de la fraction continue $F[a_0, a_1, ..., a_N]$ sont les fractions p_n/q_n pour $0 \leq n \leq N$.

Q2. Montrer, au moyen d'une récurrence, l'identité

$$F[a_0, a_1, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

On pourra appliquer l'hypothèse de récurrence aux nombres

$$a_0, a_1, ..., a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}.$$

Q3. Montrer que

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}.$$

Q4. De même, calculer

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n.$$

Q5. En déduire que les convergentes d'indices pairs p_{2k}/q_{2k} forment une suite (finie pour l'instant) strictement croissante, et qu'elles sont strictement inférieures aux convergentes d'indices impairs p_{2l+1}/q_{2l+1} qui, elles, forment une suite strictement décroissante.

Fraction continue simple

On dit que la fraction continue $F[a_0, a_1, ..., a_N]$ est "simple" si les nombres $a_0, \ldots, a_N$ sont entiers (donc $a_j \geq 1$).

Q6. Pour une fraction continue simple, montrer que $q_n > q_{n-1}$ si $n \geq 2$, et que $q_n > n$ pour $n \geq 4$.

Q7. Montrer que les convergentes d'une fraction continue simple sont déjà des fractions irréductibles.

Q8. Calculer $F[2, 2, 3]$ et $F[2, 2, 2, 1]$. Plus généralement, montrer que si N est pair (respectivement impair), et si $F[a_0, a_1, ..., a_N]$ est une fraction continue simple, il existe une fraction continue simple $F[b_0, b_1, ..., b_M]$ avec M impair (respectivement pair) telle que

$$F[a_0, a_1, ..., a_N] = F[b_0, b_1, ..., b_M].$$

Q9. Dans une fraction continue simple $x = F[a_0, a_1, ..., a_N]$, notons $a'_n = F[a_n, a_{n+1}, ..., a_N]$. Montrer que

$$x = \frac{a'_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a'_n q_{n-1} + q_{n-2}}, \quad 2 \leq n \leq N,$$

et trouver les formules correspondantes pour $n = 0$ et $n = 1$.

Q10. Démontrer que $a_n = [a'_n]$, sauf dans le cas où $n = N - 1$ avec $a_N = 1$. Dans ce dernier cas, vérifier que $a_{N-1} = [a'_{N-1}] - 1$.

Q11. En déduire que, si deux fractions continues simples sont égales :

$$F[a_0, a_1, ..., a_N] = F[b_0, b_1, ..., b_M],$$

avec $a_N > 1$ et $b_M > 1$ (hypothèse justifiée par la question **Q8**), alors $M = N$ et les deux suites sont identiques.

L'algorithme d'Euclide

Etant donné un nombre réel $x > 0$, on lui associe une suite $a_0, a_1, \ldots$ définie de la façon suivante : on commence par $a_0 = [x]$, puis on pose $y_0 = x - a_0$. Si y_0 est nul, on s'arrête là. Sinon, on pose $a'_1 = 1/y_0$, $a_1 = [a'_1]$ et $y_1 = a'_1 - a_1$. Plus généralement, si $y_{n-1} > 0$, on pose $a'_n = 1/y_{n-1}$, $a_n = [a'_n]$ et $y_n = a'_n - a_n$. On obtient ainsi une suite, qui est finie si et seulement si il advient qu'un y_n est nul.

Q12.

1. Si x est rationnel, montrer que chaque nombre a'_n est de la forme k_n/k_{n-1}, où les entiers k_n forment une suite strictement décroissante.

2. En déduire que tout nombre rationnel $x > 0$ est représentable sous la forme d'une fraction continue simple. Combien ce nombre a-t-il de telles représentations ?

Q13. On suppose que x est irrationnel.

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est infinie. On parle alors d'une fraction continue simple "infinie".

2. Montrer que les convergentes $x_n = p_n/q_n$ admettent une limite $\bar{x}$ quand $n \to +\infty$. **Indication** : on pourra commencer par prouver que $x_{2n} - x_{2n-1}$ tend vers zéro.

3. Calculant la suite $b_0, b_1, \ldots$ associée à $\bar{x}$ (c'est-à-dire $b_0 = [\bar{x}]$, $z_0 = \bar{x} - b_0$, $b'_1 = 1/z_0, \ldots$), montrer que $\bar{x} = x$.

   On dit que x admet une représentation en fraction continue simple infinie, et on note

   $$x = F[a_0, a_1, \ldots].$$

   Avec cette notation, on a

   $$a'_n = F[a_n, a_{n+1}, \ldots].$$

4. Montrer que

   $$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

Q14. Calculer a_n quand $n \leq 4$, pour le nombre $\pi = 3,1415926535\ldots$ (écriture décimale). Calculer aussi les convergentes pour $n \leq 3$. Quel encadrement de π obtenez-vous ?

Nombres quadratiques

On dit qu'une fraction continue simple est "périodique" si elle est infinie, et s'il existe K tel que $a_{n+K} = a_n$ à partir d'un certain rang.

Q15. Soit $x > 0$ un nombre réel. On suppose que la fraction continue simple qui le représente est périodique.

1. Exprimer a'_n en fonction de a'_{n+K} et de $a_n, \ldots, a_{n+K-1}$. Justifiant $a'_n = a'_{n+K}$ pour n assez grand, montrer que a'_n est racine d'une équation du second degré non triviale (c'est-à-dire $\alpha\gamma \neq 0$) $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$, à coefficients entiers positifs.

2. En déduire que x est solution d'une équation du second degré non triviale $at^2 + bt + c = 0$, à coefficients entiers positifs.

Q16. Exemples : calculer les nombres x et y dont les représentations en fractions continues sont

$$F[1, 1, \ldots, 1, \ldots], \quad F[2, 1, 2, 1, \ldots, 2, 1, \ldots].$$

Propriété de meilleure approximation

Dans cette section, on considère la représentation en fraction continue simple infinie d'un nombre irrationnel $x > 0$.

Q17. Pour $n > 1$, montrer que $|p_n - q_n x| < |p - q_n x|$ pour tout entier $p \neq p_n$.

Q18. Soit p/q une fraction rationnelle, avec $q_{n-1} < q < q_n$.

1. Montrer qu'il existe des nombres entiers μ et ν tels que

$$p = \mu p_n + \nu p_{n-1}, \quad q = \mu q_n + \nu q_{n-1}.$$

   Vérifier que μ et ν sont de signes opposés.

2. En déduire que

$$|p - qx| = |\mu\,(p_n - q_n x)| + |\nu\,(p_{n-1} - q_{n-1}x)|$$

   puis que $|p - qx| > |p_n - q_n x|$.

3. Finalement, si p/q est une fraction rationnelle avec $q \leq q_n$ et $p/q \neq p_n/q_n$, montrer que $|p - qx| > |p_n - q_n x|$.

Q19. En utilisant la question précédente, montrer que, parmi deux convergentes consécutives, l'une au moins satisfait

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| < \frac{1}{2q^2}.$$