ULC 531

SESSION 2005

Filière PC

MATHÉMATIQUES PC

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Avertissement. On attachera la plus grande importance à la clarté et à la précision des démonstrations, ainsi qu'à la présentation des copies. La partie III est indépendante de la partie II. Il est possible d'aborder la quatrième partie en admettant le résultat du III.7.

Notations.

Les ensembles des entiers naturels et des nombres réels sont notés respectivement $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. La norme et le produit scalaire de l'espace Euclidien usuel $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$ entier) sont notés respectivement $\|\cdot\|$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est *unitaire* si $\|x\| = 1$. La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est notée S^{n-1}.

Soit E un espace vectoriel réel. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est *positivement homogène* s'il existe un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ (le *degré* d'homogénéité de f) tel que, pour tout $x \in E$ et tout nombre $\rho \geq 0$, on a $f(\rho x) = \rho^\alpha f(x)$. Par exemple, une norme quelconque est positivement homogène de degré un.

Dans l'algèbre $\mathbf{M}_n(I\!R)$ des matrices $n \times n$ à coefficients réels, la matrice nulle et la matrice identité sont notées 0_n et I_n. Un vecteur $x \in I\!R^n$ est identifié à la matrice colonne $n \times 1$ de ses coordonnées. La transposée d'une matrice M est ${}^tM$. En particulier, le transposé d'un vecteur colonne est un vecteur ligne $1 \times n$. On note $\mathbf{Sym}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(I\!R)$, formé des matrices *symétriques*, c'est-à-dire telles que ${}^tM = M$. On rappelle que si $M \in \mathbf{Sym}_n$, alors les valeurs propres de M sont réelles, et M est diagonalisable dans une base orthonormée. Dans ce cas, on note $\lambda_1(M), \ldots, \lambda_n(M)$ ses valeurs propres, comptées avec leurs ordres de multiplicités, et rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1(M) \leq \lambda_2(M) \leq \cdots \leq \lambda_n(M).$$

I. Préliminaires

Si $M \in \mathbf{M}_n(I\!R)$, on définit

$$|M| := \sup\{\|Mx\| \, ; \, x \in S^{n-1}\}.$$

1. Montrer que $M \mapsto |M|$ est une norme sur $\mathbf{M}_n(I\!R)$.

2. Soit λ une valeur propre réelle d'une matrice $M \in \mathbf{M}_n(I\!R)$. Montrer que $|\lambda| \leq |M|$.

II. Cas des matrices symétriques

On démontre ici certaines des inégalités de Weyl pour les matrices symétriques réelles.

1. Montrer que les fonctions λ_j sont positivement homogènes sur $\mathbf{Sym}_n$. Sont-elles impaires ? Sinon, que peut-on dire de $\lambda_j(-M)$?

2. Soit $A \in \mathbf{Sym}_n$ et j un entier entre 1 et n.

   (a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $X_j \subset I\!R^n$ de dimension j, tel que ${}^txAx \leq \lambda_j(A)\|x\|^2$ pour tout x dans X_j.

   (b) En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel Z_j, de dimension j, tel que ${}^tzAz \geq \lambda_{n-j+1}(A)\|z\|^2$ pour tout z dans Z_j.

   (c) Soit X un sous-espace vectoriel de dimension j. En considérant l'intersection de X et Z_{n-j+1}, montrer le complément suivant à la question (a) : il existe $x \in X$ tel que $\lambda_j(A)\|x\|^2 \leq {}^txAx$. Quel énoncé obtient-on pour $j = 1$?

3. On se donne $A, B \in \mathbf{Sym}_n$.

(a) Montrer que, pour $1 \leq j \leq n$,

$$\lambda_j(A+B) \geq \lambda_j(A) + \lambda_1(B).$$

(b) En déduire, pour $1 \leq k \leq n$,

$$\lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B).$$

(c) Plus généralement, montrer que si $j+1 \geq i+k$, on a

$$\lambda_j(A+B) \geq \lambda_i(A) + \lambda_k(B).$$

III. Cas général ; continuité des valeurs propres

On considère un sous-espace vectoriel E de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, avec la propriété (**D**) suivante : *toute matrice M de E, non nulle, est à valeurs propres réelles et simples.* A nouveau, ces valeurs propres sont notées $\lambda_1(M), \ldots, \lambda_n(M)$ et rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1(M) \leq \lambda_2(M) \leq \cdots \leq \lambda_n(M),$$

les inégalités étant strictes si $M \neq 0_n$.

Jusqu'à la question 6, on se donne une suite $(A_m)_{m\geq 0}$ dans E, qui converge vers $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(x^{m,1}, \ldots, x^{m,n})$ une base de vecteurs propres unitaires de A_m, le vecteur $x^{m,j}$ étant associé à $\lambda_j(A_m)$.

1. Montrer que $A \in E$. Par la suite, on notera $(x^1, \ldots, x^n)$ une base de vecteurs propres unitaires de A, avec $Ax^j = \lambda_j(A)x^j$.

2. Montrer qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, pour laquelle les suites $\left(\lambda_j(A_{\phi(k)})\right)_{k\geq 0}$ et les suites $(x^{\phi(k),j})_{k\geq 0}$ sont convergentes. On note $\alpha_j \in \mathbb{R}$ et $w^j \in \mathbb{R}^n$ les limites correspondantes. Montrer en outre que les w^j sont unitaires.

3. (suite) Montrer que pour tout j, $Aw^j = \alpha_j w^j$.

4. (suite) On suppose $A \neq 0_n$ et $\alpha_j = \alpha_{j+1}$. Soit $(x^{m,j}, y^{m,j})$ une base orthonormée du plan engendré par $x^{m,j}$ et $x^{m,j+1}$.

   (a) Montrer que $w_{j+1} = \pm w_j$.

   (b) Montrer que, quitte à extraire de nouveau une sous-suite, on peut supposer qu'en outre, la suite $(y^{\phi(k),j})_{k\geq 0}$ est convergente. On note y sa limite. Que peut-on dire de la famille (w^j, y) ?

   (c) Montrer que $Ay - \alpha_j y$ est parallèle à w^j.

   (d) Soit P un plan vectoriel invariant par A contenant w^j. Montrer que la restriction de A à P doit être diagonalisable.

Tournez la page S.V.P.

(e) Etablir une contradiction avec la construction de (a), (b). Qu'en concluez-vous ?

5. Montrer alors que $\alpha_j = \lambda_j(A)$.

6. Montrer qu'en fait, c'est toute la suite $(\lambda_j(A_m))_{m\geq 0}$ qui converge vers $\lambda_j(A)$.

7. En déduire que les fonctions $A \mapsto \lambda_j(A)$ sont continues sur E.

IV. Cas général ; deux inégalités de Weyl

Soit E un sous-espace de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ avec la propriété (**D**) ci-dessus. On choisit deux matrices $A, B \in E$, linéairement indépendantes, et on pose

$$\rho_j(t) := \lambda_j(A + tB).$$

1. Trouver les limites de $t^{-1}\rho_j(t)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. On suppose que $\lambda_1(B) > 0$.

   (a) Soit ρ un nombre réel. Quel est le degré du polynôme $P(X) := \det(\rho I_n - A - XB)$?

   (b) Montrer que l'équation $\rho_j(t) = \rho$ possède au moins une solution.

   (c) En déduire que chaque équation $\rho_j(t) = \rho$ possède *exactement une* solution, notée t_j, et qu'en particulier chaque ρ_j est une fonction strictement croissante. *Indication* : compter soigneusement les racines de P.

3. On ne suppose plus rien sur le signe de $\lambda_1(B)$.

   (a) Montrer que l'application $t \mapsto \lambda_j(A + tB) - t\lambda_1(B)$ est croissante. *Indication* : appliquer ce qui précède à B' et E' bien choisis.

   (b) En déduire que
   $$\lambda_j(A + B) \geq \lambda_j(A) + \lambda_1(B),$$
   puis
   $$\lambda_k(A + B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B).$$

Remarque : Peter Lax a montré les deux faits suivants

- Les inégalités démontrées ci-dessus sont vraies sous l'hypothèse plus faible que les matrices de E ont toutes leurs valeurs propres réelles, pas forcément simples, les multiplicités pouvant dépendre de $M \in E$. La preuve est cependant beaucoup plus ardue.
- ($n \geq 3$) En général, un sous-espace E satisfaisant la propriété (**D**) ne peut pas se ramener à un sous-espace de $\mathbf{Sym}_n$ par conjugaison.