62.12P

SESSION 2006

Filière PC

MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche n'est pas autorisé.

Introduction.

La lubrification désigne le contrôle de l'usure des matériaux par l'introduction d'un film liquide qui réduit le frottement entre les surfaces en quasi-contact et en mouvement relatif. Plus particulièrement, la lubrification hydrodynamique concerne les mécanismes pour lesquels la forme et la vitesse relative de deux surfaces en regard engendrent la formation d'un film mince lubrifié continu sous une pression suffisamment élevée pour empêcher le contact. Le point de départ de la théorie de la lubrification hydrodynamique est un article de Reynolds publié en 1886. Dans cet article, Reynolds obtient de manière heuristique une équation qui porte maintenant son nom et qui constitue le socle des études sur les écoulements de faible épaisseur en régime laminaire.

Le but de ce problème est d'étudier quelques cas simples d'équations de type Reynolds dans le régime établi, stationnaire (*i.e.* ne dépendant pas du temps), d'un fluide de viscosité et de densité constante.

N.B. On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Tournez S.V.P.

Notations.

On munit $\mathbb{R}^2$ de la base orthonormée usuelle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Un point M de $\mathbb{R}^2$ est représenté par ses coordonnées (x, y) dans le repère usuel $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une application dérivable en un point (x_0, y_0) appartenant à Ω, les dérivées partielles de f au point de coordonnées (x_0, y_0) sont notées classiquement par :

$$\partial_x f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad \partial_y f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

A- Équation de Reynolds.

Soit h une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles strictement positives, indéfiniment dérivable. On note $h'(x)$ sa dérivée en x. Soit Ω l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -h(x) < y < 0\}.$$

On admet que l'écoulement d'un fluide visqueux, confiné entre une paroi inférieure d'équation $y = -h(x)$ et une paroi supérieure d'équation $y = 0$, peut, sous certaines hypothèses physiques qui ne font pas l'objet de ce problème, être modélisé mathématiquement de la façon suivante : on recherche $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant, pour tout (x, y) appartenant à Ω, les équations

$$-\partial_y^2 u(x, y) + \partial_x p(x, y) = 0, \tag{1}$$
$$\partial_y p(x, y) = 0, \tag{2}$$
$$\partial_x u(x, y) + \partial_y v(x, y) = 0, \tag{3}$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$u(x, -h(x)) = v(x, -h(x)) = v(x, 0) = 0, \tag{4}$$
$$u(x, 0) = V \text{ avec } V \text{ un réel strictement positif donné.} \tag{5}$$

Dans ces équations $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont les composantes au point (x,y) suivant $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ de la vitesse du fluide notée $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ et $p(x,y)$ la pression au point (x,y) au sein de ce fluide. Enfin le nombre V est la vitesse de la paroi plane qui met le fluide en mouvement.

QA.1) En utilisant (1) et (2), exprimer u au point (x,y) en fonction de la constante V, des variables x, y, des applications p et h (et éventuellement de leurs dérivées) au point x.

QA.2) On définit l'application $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$Q(x) = \int_{-h(x)}^{0} u(x,y)dy.$$

Montrer que Q est dérivable et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad Q'(x) = 0.$$

QA.3) En déduire l'équation de Reynolds, en dimension 1, suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (h^3(x)p'(x))' = 6Vh'(x).$$

AUTRES CONDITIONS AUX BORDS.

Soient α et β deux constantes strictement positives. On note n_f le vecteur correspondant à la normale extérieure à Ω sur le fond définie par

$$n_f(x) = \begin{pmatrix} -\dfrac{h'(x)}{\sqrt{1+|h'(x)|^2}} \\ \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1+|h'(x)|^2}} \end{pmatrix}.$$

On remplace les conditions aux bords (4) et (5) par les conditions aux bords suivantes

$$\partial_y u(x,-h(x)) = \beta u(x,-h(x)), \qquad U(x,-h(x)) \cdot n_f(x) = 0,$$
$$\partial_y u(x,0) = \alpha(V - u(x,0)), \qquad v(x,0) = 0.$$

QA.4) Montrer que l'on a toujours

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad Q'(x) = 0$$

et expliciter une équation différentielle ordinaire satisfaite par la pression.

Tournez la page S.V.P.

B- Le cas périodique.

On suppose que les fonctions h et p définies dans la partie précédente sont périodiques de période L. On considère le cas des conditions aux bords (4).

QB.1) Montrer que h atteint ses bornes sur $\mathbb{R}$. On note $h_0 = \inf\{h(x) : x \in \mathbb{R}\}$ et $h_1 = \sup\{h(x) : x \in \mathbb{R}\}$, montrer que $h_0 > 0$.

QB.2) Montrer que p' s'annule en au moins un point sur $]0, L[$.

QB.3) Montrer, en utilisant les résultats de la deuxième partie, l'existence d'une constante $h_* \in \mathbb{R}$ telle que

$$p'(x) = 0 \text{ si et seulement si } h(x) = h_*.$$

QB.4) Montrer alors que

$$h_* = \frac{\displaystyle\int_0^L \frac{1}{h^2(x)} dx}{\displaystyle\int_0^L \frac{1}{h^3(x)} dx},$$

que $h_0 \leq h_* \leq h_1$ et que l'une des égalités $h_* = h_0$ ou $h_* = h_1$ n'est possible que si h est une constante.

QB.5) Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application positive et continue. On pose $I_n = \int_a^b f^n(x)\, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$I_n I_{n-2} \geq (I_{n-1})^2, \text{ pour } n \geq 2.$$

En déduire que

$$h_* \leq (M(1/h))^{-1}, \tag{6}$$

où $M(f) = (\int_0^L f(x)\, dx)/L$ désigne la moyenne de f sur $[0, L]$.

QB.6) Montrer que, pour tout (x, y) appartenant à Ω, $u(x, y)$ s'écrit de la façon suivante :

$$u(x, y) = V \left(1 + \frac{y}{h(x)}\right) \left\{1 + 3\frac{y}{h(x)} \left(1 - \frac{h_*}{h(x)}\right)\right\}.$$

QB.7) En déduire, pour tout (x, y) appartenant à Ω, la valeur de $v(x, y)$.

QB.8) L'hypothèse de dérivabilité de u et v est-elle vérifiée ? A-t-on mieux ? Quelle hypothèse sur h suffit pour que u et v soient de classe $\mathcal{C}^2$?

C- Trajectoires fermées.

Les hypothèses sont celles de la partie B. On suppose, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in]-h(x_0), 0[$ donnés, l'existence d'une trajectoire définie par le couple de fonctions $t \mapsto X(t)$ et $t \mapsto Y(t)$, de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{dX(t)}{dt} = u(X(t), Y(t)), \tag{7}$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = v(X(t), Y(t)), \tag{8}$$

$$X(0) = x_0, \qquad Y(0) = y_0. \tag{9}$$

On admet que l'existence de trajectoires fermées implique qu'il existe x appartenant à $[0, L]$ tel que l'application $y \mapsto u(x, y)$ change de signe sur $]-h(x), 0[$.

QC.1) Expliquer cette condition par un dessin.

QC.2) Montrer qu'une condition nécessaire pour qu'il existe des trajectoires fermées est que

$$\frac{h_*}{h_1} < 2/3.$$

D- Étude de comportement des solutions en fonction de h.

Cas périodique.

On suppose ici que h est donnée, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, par

$$h(x) = \frac{1}{c + d\cos(2\pi x/L)},$$

où c et d sont des réels de $\mathbb{R}^{+*}$. Cette partie fait suite à la partie B.

QD.1) Comment faut il choisir c et d pour que h soit définie sur $\mathbb{R}$? Montrer que $h(0) = h_0$ et $h(L/2) = h_1$. Exprimer (c, d) en fonction de (h_0, h_1).

QD.2) Calculer h_* et calculer $M(1/h)$ en fonction de c et d.

QD.3) Exprimer h_*/h_1 à l'aide de $\delta = h_1/h_0$. Calculer la limite de h_*/h_1 pour δ tendant vers $+\infty$.

Tournez S.V.P.

QD.4) Montrer que l'on peut choisir δ pour que h satisfasse la condition nécessaire à l'existence de trajectoires fermées trouvée dans QC2.

Cas borné.

Nous considérons maintenant le cas

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad x \in]0,1[, \qquad -h(x) < y < 0\}$$

avec $h(x) > 0$ pour x appartenant à $]0,1[$ et $h(0) = h(1) = 0$. Il s'agit alors d'une étendue d'eau fermée où nous ne sommes plus dans le cas de données périodiques. On considère alors l'équation de Reynolds sur p sous la forme

$$(h^3 p' - 6hV)'(x) = 0$$

avec comme conditions aux bords

$$(h^3 p' - 6hV)(0) = (h^3 p' - 6hV)(1) = 0.$$

Avec une condition de moyenne nulle sur p, ces conditions aux bords sont les conditions naturelles dans le cas d'une étendue d'eau fermée.

QD.5) On suppose que $h(x) = x^{\theta_1} |\ln x|^{\theta_2}$ où θ_1 et θ_2 sont des constantes strictement positives et que V est une constante non nulle. Déterminer l'ensemble des (θ_1, θ_2) telles que

$$J = \int_0^1 h^3(x) |p'(x)|^2 \, dx < +\infty. \tag{10}$$

QD.6) On suppose que V est une constante non nulle. Montrer que l'on obtient toujours (10) avec $h(x) = (1+x)x^{2/3}(1-x)^{1/3}$. Donner dans ce cas la valeur de J.

Indication. On fera le changement de variable $\theta = x^{1/3}/(1-x)^{1/3}$ et on cherchera des nombres c_1, c_2, c_3, c_4 et c_5 tels que $1/(x^3+1) = c_1/(x+1) + (c_2 x + c_3)/(x^2 + c_4 x + c_5)$.

QD.7) On suppose dans cette question que V est une fonction de x de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ avec $V(0) = V(1) = 0$, $V'(0) \neq 0$ et $V'(1) \neq 0$. Supposons que $h(x) = (1+x)x^{\theta_1}(1-x)^{\theta_2}$, déterminer l'ensemble des (θ_1, θ_2) telles que $h^3|p'|^2$ soit intégrable sur $[0,1]$.

E- Équation aux dérivées partielles de type Reynolds.

Notations.

Dans cette partie, nous allons considérer un écoulement tridimensionnel. On munit $\mathbb{R}^3$ de la base orthonormée usuelle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Un point M de $\mathbb{R}^3$ est représenté par ses coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une application dérivable en un point (x_0, y_0, z_0) appartenant à Ω les dérivées partielles de f au point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) respectivement par rapport à x, y et z sont notées :

$$\partial_x f(x_0, y_0, z_0), \qquad \partial_y f(x_0, y_0, z_0), \qquad \partial_z f(x_0, y_0, z_0).$$

Soit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ une fonction vectorielle avec $v_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$. On note

- $\cdot$ le produit scalaire usuel : $v \cdot v' = v_1 v_1' + v_2 v_2'$,
- $\mathrm{div}_2 v = \partial_x v_1 + \partial_y v_2$,
- $Av = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$.

Si $p : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire, on note

$$\nabla_2 p = \begin{pmatrix} \partial_x p \\ \partial_y p \end{pmatrix}.$$

Soit $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ une fonction vectorielle, dépendant seulement de (x, y), avec $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$. On notera $\mathrm{div} g = \partial_x g_1 + \partial_y g_2$.

Écoulement en 3 dimensions.

On suppose que h est une application définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles strictement positives, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornée. Le domaine Ω est l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -h(x, y) < z < 0\}.$$

Tournez la page S.V.P.

Nous allons considérer un écoulement en trois dimensions, en les variables x, y et z, en rotation autour de son axe vertical $\overrightarrow{k}$. On suppose que le fluide est soumis à une force de traction horizontale $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ en surface où f_1 et f_2 sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dépendant de (x, y) de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si l'on note $u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ w \end{pmatrix}$ le vecteur vitesse de l'écoulement où $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ désigne les composantes horizontales de la vitesse et w la composante verticale, p sa pression (inconnue scalaire) avec v_1, v_2 et w des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et p une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$; le système d'équations aux dérivées partielles s'écrit, dans le repère lié à la rotation,

$$\partial_z^2 v(x, y, z) - \mathrm{E}\, A v(x, y, z) = \nabla_2 p(x, y, z) \tag{11}$$

$$\partial_z p(x, y, z) = 0, \tag{12}$$

$$\mathrm{div}_2 v(x, y, z) + \partial_z w(x, y, z) = 0 \tag{13}$$

et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$v(x, y, -h(x, y)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w(x, y, -h(x, y)) = 0, \tag{14}$$

$$\partial_z v(x, y, 0) = f(x, y), \qquad w(x, y, 0) = 0. \tag{15}$$

On note E le nombre d'Ekman qui permet notamment d'analyser l'effet de la rotation sur l'écoulement.

QE.1) Exprimer la vitesse $v(x, y)$ sous forme complexe $(v_1 + iv_2)(x, y)$ au point (x, y, z) en fonction de $f(x, y)$, des variables x, y, z et des fonctions p et h (et éventuellement de leurs dérivées partielles) au point (x, y).

QE.2) Montrer que pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$

$$\int_{-h(x,y)}^{0} (\mathrm{div}_2 v)\,(x, y, z)\, dz = \mathrm{div}\left(\int_{-h(x,y)}^{0} v(x, y, z)\, dz \right).$$

QE.3) Calculer $\displaystyle\int_{-h(x,y)}^{0} v(x, y, z)\, dz$ en fonction de p, f et leurs dérivées au point (x, y), puis montrer que p satisfait l'équation aux dérivées partielles en (x, y) suivante

$$\mathrm{div}\left((d_1 + d_2\, A)\nabla_2 p + (d_3 + d_4\, A) f\right) = 0 \tag{16}$$

où les fonctions d_1, d_2, d_3 et d_4, dépendant de (x, y), sont données par

$$d_1 = \frac{SC - sc}{4\kappa^3 M}, \qquad d_2 = -\frac{h}{2\kappa^2} + \frac{SC + sc}{4\kappa^3 M}, \tag{17}$$

$$d_3 = -\frac{Ss}{2\kappa^2 M}, \qquad d_4 = \frac{1}{2\kappa^2}\left(1 - \frac{Cc}{M}\right), \tag{18}$$

où l'on a noté

$$S = \sinh(\kappa h), \quad C = \cosh(\kappa h), \quad s = \sin(\kappa h), \quad c = \cos(\kappa h), \tag{19}$$

$$M = S^2 + c^2, \qquad \kappa = \sqrt{\mathrm{E}/2}. \tag{20}$$

QE.4) Donner des équivalents de d_1, d_2, d_3, d_4 lorsque $h \to 0$. Ces équivalents dépendent-ils de E ?

Fin.