72.13P

SESSION 2007

Filière PC

MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche n'est pas autorisé.

Introduction.

Recourir à la simulation numérique est indispensable pour maîtriser la complexité croissante des systèmes physiques ou chimiques. L'impact du choix des modèles d'équations aux dérivées partielles non linéaires et de leur discrétisation sur le code numérique est alors intimement lié aux choix des méthodes numériques mais également à la stabilité intrinsèque des modèles continus. Montrer qu'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaire est stable revient alors à considérer une suite de solutions *a priori* du système qui est supposée bornée uniformément dans un espace fonctionnel adéquat (en général l'espace d'énergie du système). Il s'agit alors de montrer qu'il existe une sous-suite qui converge en un sens donné vers une entité qui est elle-même solution du système d'équations aux dérivées partielles de départ.

Pour montrer une telle stabilité, les non linéarités du système d'équations aux dérivées partielles peuvent poser quelques problèmes en présence d'oscillations ou de concentrations : oscillations d'ondes acoustiques et phénomènes de concentration de masse par exemple. Nous commencerons ce problème par un exemple d'oscillation et un exemple de concentration où nous verrons que convergence forte et convergence faible vers 0 dans L^2 ne sont pas deux notions équivalentes. On établira ensuite diverses inégalités importantes pour l'étude d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui permettent de montrer quelques résultats de convergence forte c'est-à-dire quelques résultats de stabilité non linéaire.

N.B. On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Tournez S.V.P.

Notations et définitions.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $0 < p < +\infty$, on introduit l'application

$$f \in E \mapsto \|f\|_p := [\int_0^1 |f(t)|^p \, dt]^{1/p}.$$

Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on définit l'exposant conjugué p' de p par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Cette notation sera utilisée de façon systématique tout au long du texte. On rappelle que $\| \cdot \|_p$ sont des normes sur E.

Limite sup et limite inf. Par définition, pour toute suite réelle $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, la limite inf est définie par

$$\liminf_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \inf_{k > n} v_k.$$

Il en est de même pour la limite sup qui est définie par

$$\limsup_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \sup_{k > n} v_k.$$

Convergence faible ou forte vers 0 *dans* L^2. On dira qu'une suite $(u_n)_n$ d'éléments de E converge faiblement vers 0 dans L^2 si et seulement si, pour toute fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur un voisinage de $\{0\}$ et de $\{1\}$ (c'est-à-dire qu'il existe δ tel que φ soit nulle sur $[0, \delta]$ et $[1-\delta, 1]$) :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 u_n \varphi \to 0.$$

On dira que l'on a convergence forte vers 0 dans L^2 si et seulement si

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_n\|_2 \to 0.$$

Tournez S.V.P.

A- Oscillations et concentrations.

Nous allons, dans cette partie, étudier quelques propriétés liées à la convergence faible et la convergence forte vers 0 dans L^2.

QA.1) Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions de E. Montrer que si cette suite converge fortement vers 0 dans L^2 alors elle converge faiblement vers 0 dans L^2.

QA.2) *Phénomène d'oscillation.* Soit la suite $(u_n)_n$ dans E définie par $u_n(x) = \sin(nx)$. Montrer que cette suite converge faiblement vers 0 dans L^2. A-t-on convergence forte dans L^2 vers 0 ? Pourquoi ?

QA.3) *Phénomène de concentration.* Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \sqrt{n} && \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2n}, \\ u_n(x) &= 0 && \text{si } \frac{1}{n} \le x \le 1, \\ u_n(x) &= 2\sqrt{n}(1 - nx) && \text{si } \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Montrer que les éléments de la suite sont dans E. Montrer que cette suite converge faiblement vers 0 dans L^2. A-t-on convergence forte dans L^2 vers 0 ? pourquoi ?

B- Inégalités de Hölder et interpolation.

QB.1) Soient x_1, x_2 des réels positifs. Soient $1 < p < +\infty$, montrer par concavité de la fonction logarithme que

$$x_1 x_2 \le \frac{x_1^p}{p} + \frac{x_2^{p'}}{p'}.$$

QB.2) En appliquant l'inégalité précédente à $x_1 = \lambda |f(x)|$ et $x_2 = |g(x)|$, pour λ bien choisi, montrer que

$$\int_0^1 |fg| \, dx \le \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Cette inégalité s'appelle l'inégalité de Hölder.

Tournez S.V.P.

QB.3) Soient $p_1, \cdots, p_n$ des réels strictement positifs. Soit $r \in [1, +\infty[$ tel que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n}.$$

Montrer par récurrence que, pour toute famille de fonctions $f_1, \cdots, f_n$ d'éléments de E, alors

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

QB.4) Considérons u appartenant à E. Soit p, q, r et θ avec $1 \leq p, q < +\infty$, $0 \leq \theta \leq 1$ et

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$$

montrer que

$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^{\theta} \|u\|_q^{1-\theta}.$$

QB.5) Soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[$ avec $p_1 < p_2$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E qui converge fortement vers $u \in E$ pour la norme $\| \cdot \|_{p_1}$ c'est-à-dire

$$\|u_n - u\|_{p_1} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

On suppose également que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $\| \cdot \|_{p_2}$. Montrer que pour tout p strictement compris entre p_1 et p_2, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers u pour la norme $\| \cdot \|_p$.

Tournez S.V.P.

C- Les inégalités de Clarkson.

Dans cette partie, nous allons établir des inégalités dites de Clarkson. Elles permettront de donner un résultat de convergence forte.

QC.1) Soient f et g deux éléments dans E. On désire montrer que, pour $p \geq 2$, on a

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p. \tag{1}$$

Nous allons scinder la démonstration en trois étapes :

QC.1.1) Montrer que, pour tout x positif ou nul,

$$1 + x^p \leq \left(1 + x^2\right)^{\frac{p}{2}}. \tag{2}$$

QC.1.2) En utilisant (2), montrer en posant $x = u/v$ pour u et v bien choisis, que, pour tout a, b réels quelconques

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{p/2}.$$

QC.1.3) Utiliser la convexité de la fonction qui à u dans $\mathbb{R}^+$ associer $u^{p/2}$ pour en déduire l'inégalité de Clarkson (1).

QC.2) Soient $f, g \in E$, on désire montrer que, pour $1 < p < 2$, on a

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{1/(p-1)}. \tag{3}$$

Nous scinderons la démonstration en trois étapes :

QC.2.1) Cette question a pour but de montrer que pour tout x dans $]0, 1[$, on a

$$h(x) = \frac{1}{2}\left((1+x)^p + (1-x)^p\right) - (1 + x^{p'})^{p-1} \geq 0. \tag{4}$$

QC.2.1.1) En développant en série les différents termes formant $h(x)$, expliquer comment ramener l'étude du signe de h à l'étude du signe, pour tout k, de

$$\frac{1 - x^{(2k-1)p'-2k}}{(2k-1)p' - 2k} - \frac{1 - x^{2kp'-2k}}{2kp' - 2k}.$$

QC.2.1.2) Montrer que la fonction G qui à u associe $(1 - x^u)/u$ (à x fixé) est décroissante.

Tournez S.V.P.

QC.2.1.3) Déduire l'inégalité (4) des deux questions précédentes.

QC.2.2) En utilisant (4) avec $x = (v-u)/(u+v)$, montrer que pour tout u, v dans $\mathbb{R}$

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}|u|^p + \frac{1}{2}|v|^p\right)^{1/(p-1)}. \tag{5}$$

QC.2.3) Montrer maintenant l'inégalité de Clarkson (3) en utilisant (5) et l'inégalité de Minkowski suivante (que l'on admettra) : pour tout $a, b \in E$ et $0 < p-1 < 1$ alors

$$\|a\|_{p-1} + \|b\|_{p-1} \leq \big\||a| + |b|\big\|_{p-1}.$$

QC.3) Soient $1 < p < +\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E et u appartenant à E telles que

$$\|u_n\|_p \to \|u\|_p \text{ quand } n \to +\infty$$

et

$$\|u\|_p \leq \liminf_{n\to+\infty} \left\|\frac{u_n+u}{2}\right\|_p.$$

Montrer en utilisant les inégalités de Clarkson que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers u pour la norme $\|\cdot\|_p$.

Fin.