SESSION 2008

Filière PC

MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche n'est pas autorisé.

Introduction et notations

Ce problème constitue une introduction très rapide aux bases de la méthode de décomposition en fréquences de Littlewood-Paley. Notons que cette méthode est très fortement utilisée par exemple dans l'étude de la propagation de singularités au sein d'équations aux dérivées partielles variées : équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides, équations de Boltzmann dans la dynamique des gaz *etc.* Nous commencerons par l'introduction des fonctions de découpage en fréquences ψ_n dont nous donnerons quelques propriétés. Nous utiliserons, par la suite, ces fonctions de découpage en fréquences pour présenter des approximations de fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. Nous obtiendrons, entre autres, une estimation d'erreur en norme infinie entre la fonction et sa troncature sur les N premières fonctions de base.

Le symbole $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ représente $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$. La convergence de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ signifie la convergence de chacune des deux séries. Les notations définies dans une question sont conservées pour les questions suivantes.

N.B. On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Tournez S.V.P.

A- Construction d'une fonction de découpage

Nous allons, dans cette partie, définir une fonction qui nous servira pour le découpage en fréquences des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.

QA.1) Soit χ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \chi(x) = \exp(-1/x) \text{ si } x > 0, \\ \chi(x) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer que χ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

QA.2) En déduire l'existence d'une fonction θ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\theta(x) > 0 \text{ si } x \in]1/2, 2[, \qquad \theta(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Indication. Cette fonction θ sera définie par un produit de deux fonctions construites à l'aide de χ.

QA.3) Montrer que l'on peut définir une fonction Φ sur $]0, +\infty[$ par

$$\Phi(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \theta(2^{-j}x),$$

que Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0 \qquad \Phi(x) > 0.$$

Indication. Pour x fixé, étudier les propriétés de la suite $(\theta(2^{-j}x))_{j \in \mathbb{Z}}$.

QA.4) On définit φ sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{\theta(|x|)}{\Phi(|x|)} \text{ si } x \neq 0, \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction φ a les propriétés suivantes :

- φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- $\varphi(x) > 0$ si $1/2 < |x| < 2$ et $\varphi(x) = 0$ sinon.
- Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a l'inégalité suivante

  $$\sum_{j=0}^{+\infty} \varphi(2^{-j}x) \leq 1,$$

  avec égalité pour $|x| \geq 1$.

B- Quelques propriétés

On note E l'espace des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, et, pour f appartenant à E et n appartenant à $\mathbb{Z}$, on pose

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-inx)\, dx.$$

QB.1) Soit φ la fonction définie dans la partie précédente. On pose, pour tout ξ dans $\mathbb{R}$,

$$\psi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \exp(ix\xi)\, dx.$$

Montrer que ψ est continue, que $\xi^3 \psi(\xi)$ est bornée, et que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi| |\psi(\xi)|\, d\xi$$

est convergente.

QB.2) Soient $N > 0$ et t appartenant à $\mathbb{R}$, on définit, pour x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$L(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{(2\pi)^{-1}x + k}{N} \right) \exp(i((2\pi)^{-1}x + k)t).$$

- Montrer que L est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
- Exprimer, pour n dans $\mathbb{Z}$, $\hat{L}(n)$ au moyen de la fonction ψ.
- En déduire

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{k}{N}\right) \exp(ikt) = N \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi\left(N(t + 2k\pi)\right).$$

Pour toute la suite du problème on pose, pour n et t appartenant respectivement à $\mathbb{N}$ et à $\mathbb{R}$,

$$\psi_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-n}k) \exp(ikt).$$

Tournez S.V.P.

QB.3) Soit h appartenant à E tel qu'il existe α, $0 < \alpha \leq 1$, et $M \geq 0$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |h(t)| \leq M|t|^\alpha.$$

Montrer que, pour n appartenant à $\mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} |h(t)||\psi_n(t)|\, dt \leq M 2^{-\alpha n} \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^\alpha |\psi(\xi)|\, d\xi.$$

Indication. Utiliser les propriétés de $\varphi(2^{-n}k)$ (avec n et k appartenant à $\mathbb{N}$) pour ramener ψ_n à une somme finie, puis utiliser ensuite les propriétés de ψ établies à la question Q.B1) et la formule de la question précédente pour majorer ensuite l'intégrale et conclure.

C- Convergence en norme L^2

On définit les normes sur E, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ par

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 2\pi]\}.$$

Si f, g appartiennent à E, on note pour x appartenant à $[0, 2\pi]$,

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\, dt.$$

Soient x appartenant à $[0, 2\pi]$ et k appartenant à $\mathbb{Z}$, on note

$$e_k(x) = \exp(ikx).$$

Pour N dans $\mathbb{N}$, on désigne par E_N le sous-espace de E engendré par les fonctions e_k avec k appartenant à $\mathbb{Z}$ et $|k| \leq N$.

QC.1) Montrer que si f, g appartiennent à E alors $f \star g = g \star f$.

QC.2) Soient f appartenant à E et n appartenant à $\mathbb{N}$. Exprimer $f \star \psi_n$ en fonction des coefficients $\hat{f}(k)$ et montrer que $f \star \psi_n$ appartient à $E_{2^{n+1}}$.

QC.3) Si f et r appartiennent respectivement à E et à $\mathbb{N}$, on pose

$$f_r = \hat{f}(0) + \sum_{n=0}^{r} f \star \psi_n.$$

- Montrer

$$\forall f \in E, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \qquad |\hat{f_r}(k)| \leq |\hat{f}(k)|.$$

  En déduire

$$\forall f \in E \qquad \|f_r\|_2 \leq \|f\|_2.$$

- Montrer que, si N appartient à $\mathbb{N}$, r appartient à $\mathbb{N}$ et $2^r \geq N$ alors

$$\forall f \in E_N \qquad f_r = f.$$

- Montrer que, pour tout f de E,

$$\lim_{r \to +\infty} \|f_r - f\|_2 = 0.$$

  Indication. On pourra faire intervenir les sommes partielles $S_N f$ de la série de Fourier de f.

D- Contrôle en norme L^∞

Pour $0 < \alpha \leq 1$, Λ^α désigne le sous-espace de E constitué des fonctions f Höldériennes d'exposant α, c'est-à-dire pour lesquelles

$$\|f\|_\alpha = \sup\{|f(x) - f(y)||x - y|^{-\alpha} : x, y \in \mathbb{R} \text{ et } x \neq y\}$$

est fini. On suppose dans toute la suite α fixé avec $0 < \alpha \leq 1$.

QD.1) Montrer qu'il existe un réel $H > 0$ tel que

$$\forall f \in \Lambda^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f \star \psi_n\|_\infty \leq H\|f\|_\alpha 2^{-\alpha n}.$$

En déduire que, si f appartient à Λ^α, f_r converge uniformément vers f quand r tend vers l'infini.

Indication. Pour montrer la convergence uniforme vers f, on montrera tout d'abord que f_r converge normalement vers une fonction g. On identifiera f et g par une inégalité triangulaire bien choisie et une comparaison des normes L^∞ et L^2.

Tournez S.V.P.

QD.2) Établir que

$$\forall f \in \Lambda^\alpha, \forall r \in \mathbb{N}, \qquad \|f_r - f\|_\infty \leq H\|f\|_\alpha \frac{2^{-\alpha(r+1)}}{1-2^{-\alpha}}$$

et en déduire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\forall f \in \Lambda^\alpha, \forall N \in \mathbb{N}, \qquad d(f, E_N) \leq C\|f\|_\alpha N^{-\alpha},$$

où $d(f, E_N)$ désigne $\inf\{\|f - g\|_\infty : g \in E_N\}$.

Fin.