92.13P

SESSION 2009

Filière PC

MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche n'est pas autorisé.

Le but de ce problème est de décrire une méthode permettant de calculer les racines réelles d'un polynôme P d'une variable réelle. Le problème est décomposé en trois parties. La première partie est consacrée à l'étude d'une fonction construite à partir de P appelée fonction d'exclusion, la seconde partie est consacrée à la recherche d'un réel R strictement positif tel que toutes les racines du polynôme P soient contenues dans l'intervalle $[-R, R]$. La dernière partie est consacrée à l'étude d'un algorithme qui utilise la fonction d'exclusion présentée dans la première partie. Cet algorithme permet de calculer une approximation aussi fine que l'on veut de toutes les racines réelles du polynôme P.

On attachera la plus grande importance à la clarté et à la précision des démonstrations, ainsi qu'à la présentation des copies.

A - Fonction d'exclusion associée à un polynôme

Soient n un entier strictement positif et $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ nombres réels avec a_n différent de 0. On considère le polynôme de degré n défini pour x appartenant à $\mathbb{R}$ par $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Pour k un entier strictement positif, on désignera par $P^{(k)}$ la dérivée k-ième de P. Enfin, on notera Z l'ensemble fini des racines réelles de P que l'on supposera non vide.

QA.1) Soit x un réel **fixé**, on considère la fonction polynomiale qui à t réel associe $M(x,t)$ définie par

$$M(x,t) = |P(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} t^k.$$

Montrer que cette fonction est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et en déduire l'existence d'un unique réel positif pour lequel cette fonction s'annule. Comme ce réel dépend de x, on le notera $m(x)$ et on aura donc $M(x, m(x)) = 0$ soit

$$|P(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} m(x)^k = 0. \tag{1}$$

QA.2) On choisit pour P le polynôme défini pour x appartenant à $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = x^2 - 1.$$

Montrer que

$$m(x) = -|x| + \sqrt{x^2 + |x^2 - 1|}.$$

Montrer que la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qui à x associe $m(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ privé de $-1, 0$ et 1. Montrer que pour ces trois points, la fonction est dérivable à gauche et à droite.

On va désormais étudier, pour un polynôme P quelconque mais non constant, les propriétés de la fonction m qui à x associe $m(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cette fonction qui est bien définie, d'après la première question, est appelée la fonction d'exclusion associée au polynôme P. Nous montrerons dans la question **QA.5** la propriété caractéristique de cette fonction.

QA.3) Soit x appartenant à $\mathbb{R}$, montrer que $m(x) = 0$ si et seulement si $P(x) = 0$.

QA.4) Montrer que pour tout x et tout y appartenant à $\mathbb{R}$, on a

$$|P(y)| \geq |P(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} |y - x|^k = M(x, |y - x|).$$

Soit x tel que $P(x)$ est non nul, montrer que pour tout y tel que $|y - x| < m(x)$, $M(x, |y - x|) > 0$ et donc que $P(y)$ est aussi non nul.

QA.5) Pour x appartenant à $\mathbb{R}$, on note

$$d(x, Z) = \min_{z \in Z} |x - z|.$$

Montrer en utilisant la question précédente que pour tout x réel

$$m(x) \leq d(x, Z).$$

QA.6) Soient ε strictement positif fixé et x appartenant à $\mathbb{R}$.

QA.6.1) On suppose que $m(x) > \varepsilon$. Montrer que

$$M(x, m(x) + \varepsilon) < 0 < M(x, m(x) - \varepsilon).$$

Montrer également qu'il existe η strictement positif tel que pour tout y tel que $|x - y| < \eta$,

$$M(y, m(x) + \varepsilon) < 0 < M(y, m(x) - \varepsilon).$$

QA.6.2) On suppose que $m(x) \leq \varepsilon$. Montrer qu'il existe η strictement positif tel que pour tout y tel que $|x - y| < \eta$,

$$M(y, m(x) + \varepsilon) < 0.$$

QA.6.3) En déduire que la fonction m est continue sur $\mathbb{R}$.

QA.7) On désire maintenant étudier la dérivabilité de m, ce que nous allons faire en distinguant plusieurs cas.

QA.7.1) Soient x et h appartenant à $\mathbb{R}$, h étant différent de 0, montrer que

$$\frac{|P(x+h)| - |P(x)|}{h} - \sum_{k=1}^{n} |P^{(k)}(x+h)| \frac{m(x+h)^k - m(x)^k}{hk!}$$
$$- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|P^{(k)}(x+h)| - |P^{(k)}(x)|}{hk!} m(x)^k = 0.$$

QA.7.2) Soit a appartenant à $\mathbb{R}$, on note $signe(a)$ la fonction qui vaut $+1$ si a est positif et -1 sinon. Soit x appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $P^{(k)}(x)$ est non nul pour tout k compris entre 0 et $n-1$, déduire de la question précédente que la fonction m est dérivable en x et que

$$m'(x) = \frac{P'(x)signe(P(x)) - \sum_{k=2}^{n} P^{(k)}(x)signe(P^{(k-1)}(x))m(x)^{k-1}/(k-1)!}{\sum_{k=1}^{n} |P^{(k)}(x)|m(x)^{k-1}/(k-1)!}.$$

QA.7.3) Soit x appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $P(x)$ est non nul et tel qu'il existe au moins un entier k compris entre 1 et $n-1$ tel que $P^{(k)}(x) = 0$. Montrer que m est dérivable à gauche et à droite en x mais pas nécessairement dérivable en x.

QA.7.4) On suppose désormais et jusqu'à la fin de la partie A que toutes les racines réelles de P sont simples. Soit x l'une de ces racines, calculer la limite de $(m(x+h) - m(x))/h$ quand h tend vers 0 par valeurs négatives et par valeurs positives. En déduire que m est dérivable à gauche et à droite en x.

QA.8) Montrer que pour tout x et tout y appartenant à $\mathbb{R}$, on a

$$|m(y) - m(x)| \leq |y - x|.$$

On pourra, sans perte de généralité, supposer que x est inférieur où égal à y et distinguer les cas où m est dérivable sur $]x, y[$ ou non.

QA.9) On admet l'existence de

$$m_- = \lim_{x \to -\infty} \frac{m(x)}{|x|}$$

et de

$$m_+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{m(x)}{|x|}.$$

QA.9.1) Montrer en utilisant la formule (1) que

$$1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} m_-^k = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} m_+^k = 0.$$

QA.9.2) En déduire m_- et m_+.

QA.10) Montrer qu'il existe une constante α_n strictement positive telle que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$\alpha_n d(x, Z) \leq m(x).$$

On étudiera pour cela la fonction f qui à x réel associe

$$f(x) = \frac{m(x)}{d(x, Z)},$$

pour x n'appartenant pas à Z et

$$f(x) = 1,$$

sinon.

B - Détermination d'un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant toutes les racines de P

Cette partie est consacrée à la recherche d'un réel R strictement positif tel que toutes les racines du polynôme P soient contenues dans l'intervalle $[-R, R]$. On note

$$x_0 = \max_{x \in Z} |x|,$$

on supposera désormais que $a_n = 1$ et que les n réels $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ ne sont pas tous nuls.

QB.1) Soit Q la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe

$$Q(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k.$$

Montrer l'existence d'un unique réel strictement positif pour lequel cette fonction s'annule.

QB.2) Montrer que si r est un réel strictement positif tel que $Q(r)$ est aussi strictement positif alors on a

$$x_0 \leq r.$$

QB.3) Montrer que

$$x_0 \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right).$$

QB.4) Montrer également que

$$x_0 \leq |a_{n-1} - 1| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k-1}| + |a_0|.$$

On pourra utiliser pour cela le polynôme défini pour x appartenant à $\mathbb{R}$ par $(x-c)P(x)$ où c est une constante convenablement choisie.

QB.5) Montrer enfin que si on suppose que tous les a_k pour k variant de 0 à $n-1$ sont strictement positifs, on a

$$x_0 \leq \max\left(2|a_{n-1}|, 2\frac{|a_{n-2}|}{|a_{n-1}|}, \cdots, 2\frac{|a_1|}{|a_2|}, \frac{|a_0|}{|a_1|}\right).$$

QB.6) Donner un exemple de polynôme pour lequel la question **QB.4** donne une meilleure estimation de x_0 que la question **QB.5**. Donner de même un exemple de polynôme pour lequel la question **QB.5** donne une meilleure estimation de x_0 que la question **QB.4**.

C - Algorithme d'exclusion

Soit ε strictement positif fixé, on suppose que P a au moins une racine réelle et que ses racines sont simples. Pour un entier $p \leq n$ on introduit les réels $x_1, \cdots, x_p$ tels que

$$Z = \{x_1, \cdots, x_p\}.$$

En utilisant α_n introduit dans la question **QA.10**, on note pour i compris entre 1 et p,

$$B_{i,\varepsilon} = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } |x - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha_n}\right\}.$$

On note enfin

$$Z_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{p} B_{i,\varepsilon}$$

Dans cette dernière partie, on utilise les résultats des parties **A** et **B** pour construire un ensemble F_ε tel que

$$Z \subset F_\varepsilon \subset Z_\varepsilon.$$

On choisit R tel que Z soit inclus dans $[-R, R]$ et on construit une suite de réels $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite d'ensembles de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

On pose $y_0 = -R$ et $F_{0,\varepsilon} = \emptyset$.

1) Si $m(y_0) \geq \varepsilon/2$, on pose $y_1 = y_0 + m(y_0)$ et

$$F_{1,\varepsilon} = \emptyset.$$

Sinon on cherche le plus petit entier k strictement positif tel que $m(y_0+k\varepsilon) \geq \varepsilon/2$ et on pose $y_1 = y_0 + k\varepsilon$. On définit alors si $y_0 \leq y_1 - m(y_1)$:

$$F_{1,\varepsilon} = F_{0,\varepsilon} \cup [y_0, y_1 - m(y_1)]$$

et

$$F_{1,\varepsilon} = \emptyset$$

sinon.

2) Plus généralement, pour n supérieur ou égal à 1, si $m(y_n) \geq \varepsilon/2$, on pose $y_{n+1} = y_n + m(y_n)$ et

$$F_{n+1,\varepsilon} = F_{n,\varepsilon},$$

sinon on cherche le plus petit entier k strictement positif tel que $m(y_n + k\varepsilon) \geq \varepsilon/2$ et on pose $y_{n+1} = y_n + k\varepsilon$. On définit alors si $y_n \leq y_{n+1} - m(y_{n+1})$:

$$F_{n+1,\varepsilon} = F_{n,\varepsilon} \cup [y_n, y_{n+1} - m(y_{n+1})]$$

et

$$F_{n+1,\varepsilon} = F_{n,\varepsilon}$$

sinon.

QC.1) Montrer qu'il existe un entier n_0 pour lequel

$$y_{n_0} > R.$$

QC.2) Montrer en utilisant **QA.4)** que

$$Z \subset F_{n_0,\varepsilon}.$$

QC.3) Montrer en utilisant **QA.8)** et **QA.10)** que l'on a

$$F_{n_0,\varepsilon} \subset Z_\varepsilon.$$

QC.4) Comment peut-on adapter cet algorithme si on veut seulement utiliser une valeur approchée de $m(x_n)$ pour n compris entre 0 et n_0 ?

Remarque : L'idée d'un tel algorithme a été proposée par Jean-Pierre Dedieu et Jean-Claude Yakoubsohn, il fournit un moyen efficace de calculer une bonne approximation des racines du polynôme et s'étend aussi au cas où P a des racines multiples. Il demande seulement de calculer une approximation des valeurs de la fonction m, ce qui est très simple car la fonction introduite en **QA.1** est strictement décroissante.

Fin de l'épreuve