## EPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE DE MATHEMATIQUES

**Liste des questions pouvant être liées :**

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20)

( 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40)

**Ce sujet comporte 40 questions, toutes obligatoires**

QCM mode d'emploi : cf ICNA commune.

On considère la fonction $f_\alpha$ de la variable réelle $x$

$$f_\alpha(x) = x^{1-x^\alpha}$$

définie sur $\mathbb{R}_+^*$, où $\alpha$ est un paramètre réel non nul.

On note $\mathcal{C}_\alpha$ la courbe représentative de $f_\alpha$ dans le repère $Oxy$.

**Question n° 01 :**

Il est possible d'écrire $f_\alpha$ sous la forme

a) $\exp((1-\alpha \ln x)\ln x)$.

b) $(1-e^{\alpha \ln x})\ln x$.

c) $\ln f_\alpha(x) = \ln(1-e^{\alpha \ln x}) + \ln x$.

d) $\alpha \ln x = \ln(1 - \dfrac{\ln f_\alpha(x)}{\ln x})$.

**Dans les questions n° 02 à n° 10, on suppose $\alpha \in \{-1, 1\}$.**

**Question n° 02 :**

Au voisinage de $x = 0$

a) $f_1$ admet un prolongement par continuité à droite.

b) $f_1$ n'est pas borné.

c) $f_1$ admet un prolongement dérivable à droite.

d) la pente de la tangente à droite en $O$ est horizontale.

**Question n° 03 :**

$f_1$ admet au voisinage de $x = 1$ un développement limité d'ordre 4 de la forme

$$f_1(x) = s + t\,(1-x) + u\,(1-x)^2 + v\,(1-x)^3 + w\,(1-x)^4 + o\left((1-x)^4\right).$$

a) $t = 0$ car $f_1$ est paire.

b) $s = -u$ et $w = \dfrac{1}{6}$.

La tangente à $\mathcal{C}_1$ au point $x = 1$

c) est horizontale et traverse $\mathcal{C}_1$.

d) est au dessus de $\mathcal{C}_1$ (au sens large).

**Question n° 04 :**

Au voisinage de $x = +\infty$,

a) $f_1(x) = o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $f_1(x) = o\left(e^x\right)$.

$\mathcal{C}_1$ admet

c) $x = 0$ pour asymptote.

d) une branche parabolique.

**Question n° 05 :**

On pose $x \mapsto \varphi(x) = \dfrac{1}{x} - 1 - \ln x$ définie pour $x > 0$.

a) $\varphi$ est continue, dérivable et bornée.

b) $\varphi$ est strictement croissante.

c) $\varphi$ admet un extremum en $x = 1$.

d) $\varphi$ admet un seul point d'inflexion.

**Question n° 06 :**

a) $f_1'$ et $\varphi$ sont de même signe sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) $f_1$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\varphi$ l'est.

c) $\varphi$ et donc $f_1$ admettent un extremun au point $x = 1$.

d) $f_1$ est croissante sur $]0, 1[$.

**Question n° 07 :**

$f_{-1}$ est prolongeable à droite en $x = 0$ et son prolongement

a) n'est pas dérivable en 0.

b) est dérivable en 0 et de dérivée nulle.

c) La droite $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_{-1}$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_{-1}(x) = 0$.

**Question n° 08 :**

a) $f_{-1}(x) = 1 + o\left((x-1)^2\right)$ au voisinage de $x = 1$.

b) $f'_{-1}(1) = f''_{-1}(1) = 1$.

La tangente à $\mathcal{C}_{-1}$ au point $x = 1$

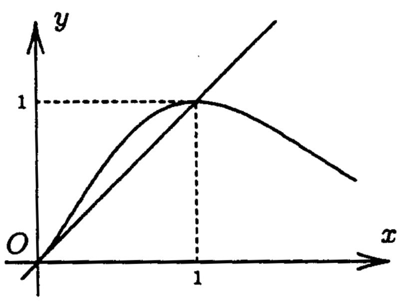
c) est parallèle à la droite $y = x$.

d) est au dessous de $\mathcal{C}_{-1}$ (au sens large).

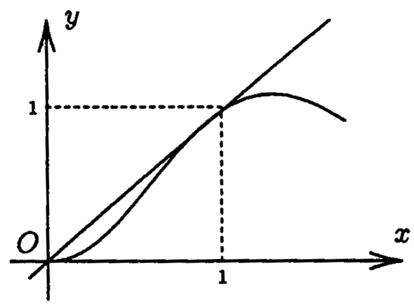
**Question n° 09 :**

$\mathcal{C}_1$ a pour allure

a)

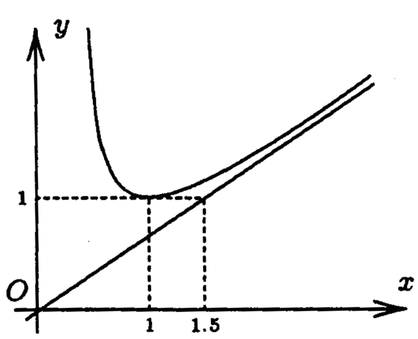



b)

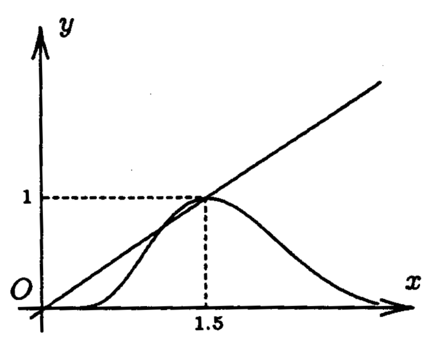



$\mathcal{C}_{-1}$ a pour allure

c)




d)




**Question n° 10 :**

a) $\mathcal{C}_1$ est au dessus de $\mathcal{C}_{-1}$ (au sens large).

b) $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$ se coupent en $O$.

c) $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$ ont un seul point commun.

d) La droite $y = x$ coupe $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$ au seul point commun aux deux courbes.

**Question n° 11 :**

Dans cette question, on suppose que $\alpha = -2$. Au voisinage de $x = +\infty$,

$$f_{-2}(x) = s + t\,x + u\,\frac{\ln x}{x} + o(\frac{1}{x^2}).$$

a) Pour que l'expression précédente soit un développement généralisé, il faut nécessairement que $u$ soit nul.

b) $u = 0$ car la droite $y = x$ est une asymptote oblique de $\mathcal{C}_{-2}$.

c) $\mathcal{C}_{-2}$ est toujours au dessous de son asymptote oblique (au sens strict).

d) $\mathcal{C}_{-2}$ traverse son asymptote oblique en au moins deux points.

**Question n° 12 :**

Au voisinage de $x = 0$

a) $f_\alpha(x)$ n'est jamais borné.

b) $f_\alpha(x)$ tend vers 0 si $\alpha > 0$.

Lorsque $f_\alpha$ admet un prolongement par continuité à droite de 0 alors

c) $f_\alpha$ est dérivable et $\lim\limits_{x \to 0^+} f'_\alpha(x) = 1$.

d) $\mathcal{C}_\alpha$ admet au voisinage de 0 la droite $y = x + 1$ pour tangente.

**Question n° 13 :**

Au voisinage de $x = +\infty$

a) si $\alpha \in ]-1, 0[$ alors $\mathcal{C}_\alpha$ admet une asymptote oblique.

b) si $\alpha \in ]-\infty, -1[$ alors $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_\alpha$.

c) si $\alpha > 0$ alors $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}_\alpha$.

d) si $\alpha < 0$ alors $\mathcal{C}_\alpha$ a une branche infinie de direction asymptotique $y = 0$.

**Question n° 14 :**

On pose pour tout $\alpha \neq 0$ et pour tout $x > 0$, $\varphi_\alpha(x) = \varphi(x^\alpha)$ (Cf Question 05).

a) $\varphi_\alpha$ et $\varphi$ ont le même ensemble de dérivabilité.

b) $\varphi_\alpha$ et $\varphi$ ont le même sens de variation.

c) $f'_\alpha(x)$ et $\varphi_\alpha(x)$ sont de signe contraire.

d) $f'_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x)\, x^{\alpha-1} f_\alpha(x)$.

**Question n° 15 :**

a) $f_\alpha$ admet un extremun en $x = 1$ si $\alpha < 0$.

b) $f_\alpha$ possède un extremun, pour tout $\alpha$.

c) $f_\alpha$ est strictement décroissante sur $]0, 1[$ si $\alpha > 0$.

d) $f_\alpha$ est strictement décroissante sur $[2, 3]$ si et seulement si $\alpha < 0$.

**Question n° 16 :**

On suppose $0 < \alpha < \beta$ dans cette question.

a) $0 < x < 1 \;\Rightarrow\; x^\alpha < x^\beta$.

b) $x^\beta > x^\alpha \;\Rightarrow\; x > 1$.

c) $\mathcal{C}_\alpha$ est au dessous de $\mathcal{C}_\beta$ (au sens large).

d) $\mathcal{C}_\alpha$ et $\mathcal{C}_\beta$ ont un seul point commun.

**Question n° 17 :**

On considère l'équation $(E)$ : $m = x^{1-x^\alpha}$, où l'inconnue est $x$, avec les deux paramètres $m > 0$ et $\alpha \neq 0$.

a) $(E)$ admet au moins une solution.

b) $(E)$ admet une et une seule solution si et seulement si $m = 1$.

c) $(E)$ admet exactement deux solutions distinctes.

d) si $m = \dfrac{1}{2}$ alors $(E)$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}_+^*$.

**Question n° 18 :**

La tangente à $\mathcal{C}_\alpha$ en un point d'abscisse $\xi > 0$ passe par le point $O$ si

a) $\varphi_\alpha(\xi) = 0$.

b) $f'_\alpha(\xi) = \dfrac{f_\alpha(\xi)}{\xi}$.

c) $1 + \alpha \ln \xi = 0$.

d) $\xi = 1$.

**Question n° 19 :**

Le lieu des points de $\mathcal{C}_\alpha$ en lesquels la tangente passe par le point $O$ a pour équation

a) $y = x^{1-1/e}$.

b) $x = e^{-1/\alpha}$ et $y$ quelconque.

c) $y = f_e(x)$.

d) $y^e = x^{e-1}$.

**Question n° 20 :**

Soit l'équation différentielle définie dans $\mathbb{R}_+^*$ par

$$y' - \left(\frac{1}{x} - x^{\alpha-1}(1 + \alpha \ln x)\right) y = 0. \qquad (1)$$

L'ensemble des solutions de (1)

a) est constitué des fonctions de la forme $f_\alpha(x) + K,\ K \in \mathbb{R}$.

b) est un espace vectoriel ayant toujours pour base $\{x \mapsto f_1(x)\}$.

Il existe une (au moins) solution $y$ de (1)

c) qui soit prolongeable en 0 et telle que $y(0) = 0$.

d) vérifiant $y(1) = 0$.

---

On considère dans l'espace vectoriel réel $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$, rapporté à la base $\mathcal{B}_0 = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{l})$, l'endomorphisme $f$ de matrice dans $\mathcal{B}_0$ :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Pour les deux questions suivantes, de façon générale soit $M$ une matrice $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

**Question n° 21 :**

a) $\lambda$ est valeur propre de $M$ si et seulement si $\text{Ker}\,(M - \lambda I_4)$ est non vide.

b) il existe toujours au moins une valeur propre réelle.

c) S'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$ alors $X$ est un vecteur propre.

d) $M$ admet un nombre infini de vecteurs propres.

**Question n° 22 :**

a) $M$ est toujours trigonalisable.

b) Si $M$ est de rang 4 alors elle est diagonalisable.

Si les valeurs propres sont réelles alors

c) on peut conclure à la diagonalisation de $M$.

d) les sous espaces propres sont stables par $M$.

**Question n° 23 :**

0 n'est pas une valeur propre de $A$ donc

a) $A$ est inversible et $f$ est un automorphisme.

b) $f$ est injective mais non bijective.

De plus, on a

c) Les quatre vecteurs lignes de $A$ forment une base de $\mathcal{E}$.

d) Le sous espace $\text{Im}\, f$ est engendré par la famille $(\vec{k}, \vec{l})$.

**Question n° 24 :**

Les sous espaces vectoriels $\text{Ker}\, f$ et $\text{Im}\, f$

a) sont des sous espaces propres de $f$.

b) ne sont pas stables de $f$.

De plus, on a

c) $\text{Ker}\, f \subset \text{Im}\, f$.

d) $\text{Ker}\, f + \text{Im}\, f = \mathcal{E}$.

On note dans la suite $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ et $\lambda_4$ les quatre valeurs propres de $f$ telles que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$$

et on note respectivement $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_4$ les vecteurs propres associés tels que leurs composantes soient des entiers relatifs, la première composante non nulle étant un entier positif aussi petit que possible.

**Question n° 25 :**

a) $\text{Ker}\,(f - \lambda_2\, Id_{\mathcal{E}}) = \text{Ker}\, f$.

b) $\lambda_1 = -\lambda_2$.

c) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 5$.

d) $\exists\, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $\lambda_i \notin \mathbb{R}$.

Soit la famille

$$\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$$

**Question n° 26 :**

$\mathcal{F}$ n'est pas une base de $\mathcal{E}$

a) car la somme des dimensions des sous espaces propres n'est pas 4.

b) mais c'est une base de Im $f$.

De plus, on a

c) les deux premières composantes de $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_4$ sont nulles.

d) deux des vecteurs de $\mathcal{F}$ ont leur dernière composante nulle.

**Question n° 27 :**

Le vecteur $\alpha\,\vec{u}_1 + \beta\,\vec{u}_2 + \gamma\,\vec{u}_3 + \delta\,\vec{u}_4$, où $(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta)$ est une 4-liste de réels,

a) appartient à Im $f$ pour toute 4-liste $(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta)$.

b) appartient à Im $f$ seulement pour une 4-liste $(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta)$.

c) ne peut jamais être nul car $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

d) appartient à Ker $f$ pour au moins une 4-liste $(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta)$.

Soit la famille $\mathcal{B}$ de matrice dans la base $\mathcal{B}_0$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Question n° 28 :**

(tr désigne la trace c'est à dire la somme des éléments diagonaux d'une matrice)

a) $P$ n'est pas inversible.

b) $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

c) $\det A = \det P$.

d) $\operatorname{tr} P = \operatorname{tr} P^{-1}$ (Si $P^{-1}$ existe).

Dans la suite pour $1 \leq i \leq 4$, $C_i = (a_{kl})$, où $(k,\, l) \in (\{1,\, 2,\, 3,\, 4\})^2$, désigne la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(k,\, l) \neq (i,\, i),\ a_{kl} = 0 \text{ et } a_{ii} = 1.$$

Soient les quatre matrices $B_1$, $B_2$, $B_3$ et $B_4$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que

$$A = \lambda_1\, B_1 + \lambda_2\, B_2 + \lambda_3\, B_3 + \lambda_4\, B_4.$$

**Question n° 29 :**

Une telle décomposition de $A$

a) n'est pas possible.

b) est possible car $\dim \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) = 4$.

Les matrices $B_1$, $B_2$, $B_3$ et $B_4$

c) existent et sont diagonales.

d) existent et sont uniques.

**Question n° 30 :**

Si $O$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ alors pour tout $(i,\, j) \in (\{1,\, 2,\, 3,\, 4\})^2$

a) $B_i\, B_j = B_j\, B_i$.

b) $C_i\, C_j = O$.

c) $C_i^2 = -C_i$.

d) $B_i\, B_j = O$.

**Question n° 31 :**

$A^n$ vaut, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

a) $\lambda_1^n B_1 + \lambda_2^n B_2 + \lambda_3^n B_3 + \lambda_4^n B_4$.

b) $\lambda_1 B_1^n + \lambda_2 B_2^n + \lambda_3 B_3^n + \lambda_4 B_4^n$.

Nous avons pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$,

c) $B_i = P\,C_i\,P^{-1}$.

d) $C_i = P\,B_i\,P^{-1}$.

**Question n° 32 :**

Posons $A^n = (\alpha_{ij})$, où $(i, j) \in (\{1, 2, 3, 4\})^2$ ($i$ désigne la ligne et $j$ la colonne).

a) $\alpha_{11} = 3^n + 4$.

b) $\alpha_{41} = 0$.

c) $i \geq 3$ et $j \leq 2 \;\Rightarrow\; \alpha_{ij} = 0$.

d) $i \leq 2$ et $j \geq 3 \;\Rightarrow\; \alpha_{ij} = 0$.

**Question n° 33 :**

On pose $\mathcal{S} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$.

a) $\mathcal{S}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

b) $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = I_4$.

La matrice $A^{-1}$

c) n'existe pas car Ker $f$ n'est pas réduit au vecteur nul.

d) est égale à $-B_1 + B_2 + \dfrac{1}{2}B_3 + \dfrac{1}{3}B_4$.

**Question n° 34 :**

Soit $G$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{S}$.

a) $\dim G = \dim \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) = 4$.

b) $\{A^n,\ n \in \mathbb{Z}\} \subset G$.

c) Toute matrice de $G$ est inversible.

d) Il existe dans $G$ des matrices inversibles.

**Question n° 35 :**

$\mathcal{L} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ une 4-liste de réels non tous nuls. On pose dans cette question et la suivante

$$M = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i\, B_i \text{ et } N = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i\, C_i.$$

a) $M\,P = P\,N$.

b) $M$ et $N$ n'ont pas le même rang.

On peut choisir $\mathcal{L}$ tel que

c) $M = I_4$.

d) $M = N$.

**Question n° 36 :**

$M = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \alpha_i\, B_i$ est inversible si et seulement si

a) $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4 \neq 0$.

b) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \neq 0$.

De plus,

c) il existe $\mathcal{L}$ tel que $M = A^{-1}$.

d) $M$ est inversible $\forall\ \mathcal{L}$.

**Question n° 37 :**

Dans cette question et les suivantes, on considère les quatre séries entières $u^{(i)}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^{(i)}(t) = \lambda_i^n t^n.$$

a) $|\lambda_i| \geq 1$ pour tout $i$ donc la série entière $u^{(i)}$ diverge simplement sur $\mathbb{R}$.

b) Il existe $i$ tel que la série entière $u^{(i)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

c) Une au moins des quatre séries entières $u^{(i)}$ a un rayon de convergence infini.

d) La série entière $u^{(1)}$ diverge simplement si $|t| > 1$.

**Question n° 38 :**

a) La série entière $u^{(i)}$ est pour tout $i$ normalement convergente sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

b) La série entière $u^{(4)}$ est normalement convergente sur $\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$ mais n'y est pas uniformément convergente.

c) Sur son domaine de convergence, la somme de la série entière $u^{(3)}$ est $\frac{1}{2-t}$.

d) Les séries entières $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ sont uniformément convergentes sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

**Question n° 39 :**

$t$ réel fixé. Soit la suite $S_n = I_4 + t\,A + t^2\,A^2 + ... + t^n\,A^n$ où $n \in \mathbb{N}$. La limite éventuelle de cette suite est notée $L$.

a) $S_n$ n'existe pas car les séries $u^{(i)}$, où $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, divergent.

b) $S_n$ appartient à $G$.

c) $L$ existe pour $t > 3$.

d) $L$ existe pour $t = 0$.

**Question n° 40 :**

Si $L$ existe alors ses composantes dans $S$ sont

a) $(0, 0, 0, 0)$.

b) aucune car $L \notin G$.

c) $\left(\frac{1}{1+t}, \frac{1}{1-t}, \frac{1}{1-2t}, \frac{1}{1-3t}\right)$.

d) $\left(\frac{1}{1+t}, \frac{1}{1-t}, \frac{1}{2-t}, \frac{1}{3-t}\right)$.