

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES INGENIEURS  
DU CONTROLE DE LA NAVIGATION AERIENNE

◇

*Epreuve optionnelle obligatoire de MATHÉMATIQUES*

Durée : 4 heures

Coefficient : 3

◇

Ce sujet comporte (dans l'énoncé d'origine, pas dans cette version) :

1 page de garde

2 pages d'instructions pour remplir le QCM

1 page d'avertissement

14 pages de texte, numérotées de 1 à 14

◇

**CALCULATRICE AUTORISÉE**

**ÉPREUVE COMMUNE OBLIGATOIRE  
DE MATHÉMATIQUES**

*À LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT*

L'épreuve « commune obligatoire de mathématiques » de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

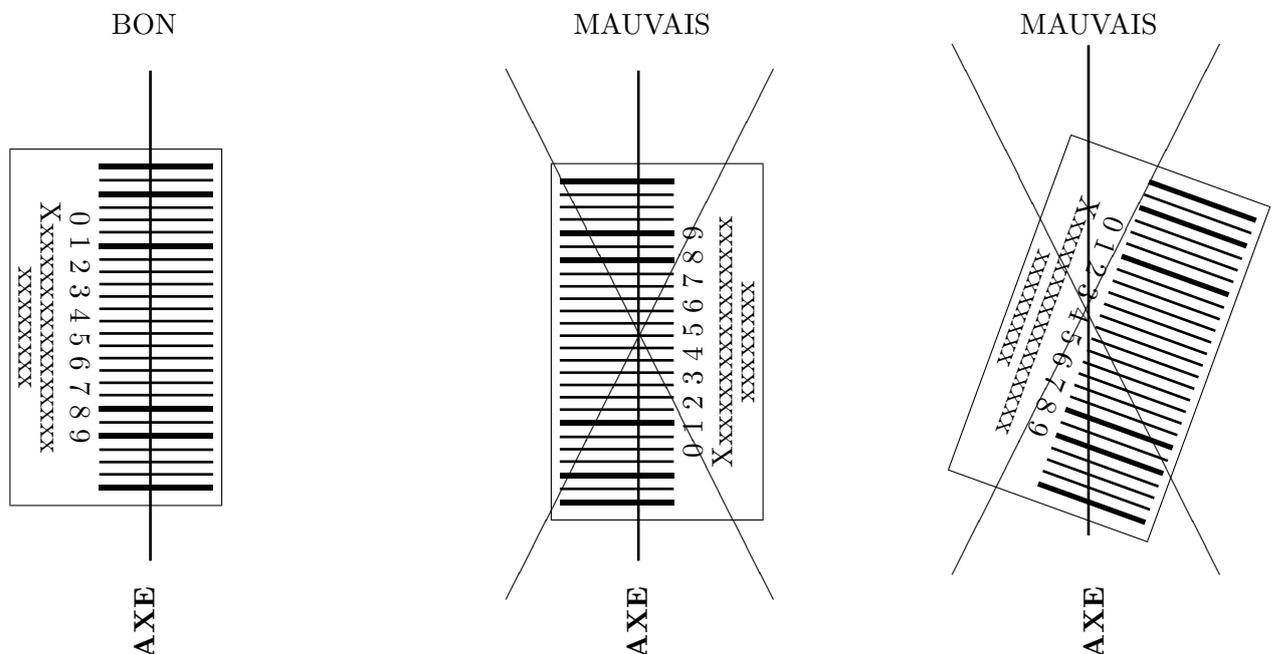
**ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM**

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, l'**étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez**, c'est-à-dire épreuve commune obligatoire de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

**POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES**

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un **STYLO BILLE** ou une **POINTE FEUTRE** de couleur **NOIRE**.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 40 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée avant l'énoncé du sujet lui-même.

**Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.**

6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases a, b, c, d, e.

Pour chaque ligne numérotée de 01 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question ,  
*la ligne correspondante doit rester vierge.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse  
*vous devez noircir l'une des cases a, b, c, d.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,  
*vous devez noircir deux des cases a, b, c, d et deux seulement.*
- ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées a, b, c, d n'est bonne,  
*vous devez alors noircir la case e.*

**Attention, toute réponse fautive entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.**

#### 7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 :  $1^2 + 2^2$  vaut :

- a) 3    b) 5    c) 4    d) -1

Question 2 : le produit  $(-1)(-3)$  vaut :

- a) -3    b) -1    c) 4    d) 0

Question 3 : Une racine de l'équation  $x^2 - 1 = 0$  est :

- a) 1    b) 0    c) -1    d) 2

**Vous marquerez sur la feuille réponse :**

1	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	a	b	c	d	e
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
	a	b	c	d	e
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	a	b	c	d	e
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# AVERTISSEMENT

## QUESTIONS LIEES

1 à 18

19 à 36

37 à 40

## PARTIE I

$n$  et  $p$  désignent des entiers naturels strictement positifs.

On note  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $p$  à coefficients réels;  $M$  étant un élément de cet ensemble, on désigne par  ${}^tM$  la matrice transposée de  $M$ .

On note  $\mathcal{O}_p$  l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre  $p$ ,  $\mathcal{S}_p$  l'ensemble des matrices symétriques d'ordre  $p$ ,  $\mathcal{A}_p$  l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre  $p$  telles que  $A^2 = -I_p$  où  $I_p$  est la matrice unité dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $p$ .

Si l'on désigne par  $X$  un vecteur de  $\mathbb{C}^p$ ,  $\bar{X}$  désigne le vecteurs dont les coordonnées sont les nombres complexes conjugués des coordonnées du vecteur  $X$ .

**Question 1.** Tout élément  $A$

- a) de l'ensemble  $\mathcal{S}_p$  vérifie  ${}^tAA = I_p$
- b) de l'ensemble  $\mathcal{O}_p$  vérifie  ${}^tA = A$
- c) de l'ensemble  $\mathcal{A}_p$  vérifie  ${}^tA = A$
- d) de l'ensemble  $\mathcal{O}_p$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{S}_p$

**Question 2.** On a

- a) tout élément de  $\mathcal{S}_p$  est inversible
- b) tout élément  $A$  de l'ensemble  $\mathcal{O}_p$  est inversible car le déterminant  $\det A = 1$
- c) toute matrice antisymétrique d'ordre  $p$  est non inversible car ses coefficients diagonaux sont tous nuls
- d) pour qu'une matrice antisymétrique d'ordre  $p$  soit inversible il est nécessaire que l'entier  $p$  soit pair

**Question 3.** L'ensemble  $\mathcal{A}_p$  est

- a) non vide pour tout  $p$  entier strictement positif
- b) vide pour tout  $p$  entier strictement positif
- c) non vide uniquement dans le cas où l'entier strictement positif  $p$  est pair
- d) non vide uniquement dans le cas où l'entier strictement positif  $p$  est impair

**Question 4.** L'ensemble  $\mathcal{O}_p$  est

- a) un sous-espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$
- b) un sous-anneau de l'anneau  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$
- c) un groupe pour la loi d'addition des matrices
- d) un groupe pour la loi de multiplication des matrices

**Question 5.** L'ensemble  $\mathcal{S}_p$  est

- a) un groupe pour la multiplication des matrices

- b) un sous-espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et un sous-anneau de l'anneau  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$
- c) un sous-espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  mais n'est pas un sous-anneau de l'anneau
- d) un sous-anneau de l'anneau  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  mais n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

**Question 6.** On désigne par  $J_n$  la matrice de  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  définie par la décomposition par blocs  $J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$  pour tout  $n$  entier strictement positif. On a

- a)  $J_n$  appartient à  $\mathcal{A}_n$
- b) il n'existe aucun entier strictement positif  $p$  tel que  $J_n$  appartienne à  $\mathcal{A}_p$
- c)  $J_n$  appartient à  $\mathcal{A}_{2n}$
- d)  $J_n$  appartient à  $\mathcal{O}_{2n}$

Soit  $A$  un élément, s'il en existe, de l'ensemble  $\mathcal{A}_{2n}$ . On désigne par  $f$ , s'il existe, l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^{2n}$  dont la matrice associée par rapport à la base canonique de  $\mathbb{C}^{2n}$  est la matrice  $A$

**Question 7.** Soit  $P$  un élément de l'ensemble  $\mathcal{O}_{2n}$ . Alors la matrice  $B = {}^tPAP$

- a) appartient à  $\mathcal{S}_{2n}$
- b) est antisymétrique mais n'appartient pas à  $\mathcal{A}_{2n}$
- c) n'est ni symétrique ni antisymétrique
- d) est inversible et a pour matrice inverse  ${}^tPA^{-1}P$  où  $A^{-1}$  désigne l'inverse de  $A$

**Question 8.** On a

- a) le spectre de la matrice  $A$  est inclus dans l'ensemble  $\{-1, 1\}$
- b) le spectre de la matrice  $A$  est inclus dans l'ensemble  $\{-i\}$
- c)  $i$  est valeur propre de l'endomorphisme  $f$  car la matrice  $(A - i I_{2n})$  n'est pas inversible puisque  $A$  est une matrice à coefficients réels
- d) les valeurs complexes de l'endomorphisme  $f$  sont conjuguées deux à deux car  $A$  est une matrice à coefficients réels

**Question 9.** Soit  $x$  un vecteur de  $\mathbb{C}^{2n}$ , alors

- a) le vecteur  $f(x) + ix$  est vecteur propre de l'endomorphisme  $f$  associé à la valeur propre  $i$
- b) le vecteur  $f(x) + x$  est vecteur propre de l'endomorphisme  $f$  associé à la valeur propre  $1$
- c) le vecteur  $f(x) - ix$  est vecteur propre de l'endomorphisme  $f$  associé à la valeur propre  $i$
- d) le vecteur  $f(x)$  est vecteur propre de l'endomorphisme  $f$  associé à la valeur propre  $-1$ , car  $A^2 = -I_{2n}$

**Question 10.**

- a)  $\mathbb{C}^{2n}$  est égal à la somme directe des deux sous-espaces propres de l'endomorphisme  $f$
- b)  $\mathbb{C}^{2n}$  est égal à la somme directe des trois sous-espaces propres de l'endomorphisme  $f$
- c) l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable
- d) l'endomorphisme  $f$  n'est pas diagonalisable

**Question 11.** De manière générale

- a) un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{C}$  est nécessairement un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et sa dimension sur  $\mathbb{R}$  est le double de sa dimension sur  $\mathbb{C}$
- b) un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{R}$  est nécessairement un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$

- c) pour pouvoir étendre la structure d'espace vectoriel de  $E$  sur  $\mathbb{R}$  au corps des complexes  $\mathbb{C}$ , il faut que la dimension de  $E$  sur  $\mathbb{R}$  soit paire
- d) pour pouvoir étendre la structure d'espace vectoriel de  $E$  sur  $\mathbb{R}$  au corps des complexes  $\mathbb{C}$ , il suffit que la dimension de  $E$  sur  $\mathbb{R}$  soit paire

**Question 12.** On désigne par  $\dim_K$  la dimension d'un espace vectoriel sur le corps  $K$ . Soit  $u$  l'application qui à tout élément  $X$  de  $\mathbb{C}^{2n}$  associe  $X$ . On note  $E_i$  le sous-espace propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ ,  $u$  vérifie

- a)  $u$  est linéaire lorsque  $\mathbb{C}^{2n}$  est considéré comme espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$
- b)  $u$  est linéaire lorsque  $\mathbb{C}^{2n}$  est considéré comme espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$
- c) les dimensions sur  $\mathbb{R}$  des espaces vectoriels  $u(E_i)$  et  $E_i$  sont égales
- d)  $\dim_{\mathbb{R}} u(E_i) = (\dim_{\mathbb{R}} E_i) - 1$

*Remarque :* cette question semble incohérente. Lire probablement  $u : X \mapsto \bar{X}$  ?

**Question 13.** On a

- a)  $u(E_1) \subset E_2$  et  $u(E_2) \subset E_1$
- b)  $\dim_{\mathbb{C}} E_1 = n + 1$
- c)  $\dim_{\mathbb{R}} E_1 = \dim_{\mathbb{R}} E_2 = n$
- d)  $\dim_{\mathbb{C}} E_1 = \dim_{\mathbb{C}} E_2 = n$

**Question 14.** Soit  $X$  et  $Y$  deux vecteurs de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^{2n}$

- a) si  $X$  et  $Y$  appartiennent à deux sous-espaces propres de  $f$  distincts alors  $X$  et  $Y$  sont orthogonaux
- b) si  $X$  et  $Y$  appartiennent au même sous-espace propre de  $f$  alors  $X$  et  $Y$  sont orthogonaux car  ${}^t Y X = 0$
- c) si  $X$  et  $Y$  appartiennent au même sous-espace propre de  $f$  alors  $X$  et  $Y$  sont orthogonaux car  $\overline{{}^t Y X} = 0$
- d) si  $X$  et  $Y$  appartiennent au même sous-espace propre de  $f$  alors  ${}^t Y X = 0$  car la matrice  $A$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{O}_{2n}$

**Question 15.** a) il n'existe pas de base orthonormale de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^{2n}$  formée de vecteurs propres de  $f$

- b) la famille  $(X_1, X_2, \dots, X_n, \overline{X_1}, \overline{X_2}, \dots, \overline{X_n})$ , où  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est une base orthonormale du sous-espace propre  $E_1$ , constitue une base orthonormale de  $\mathbb{C}^{2n}$
- c) la famille  $(X_1, X_2, \dots, X_n, {}^t X_1, {}^t X_2, \dots, {}^t X_n)$ , où  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est une base orthonormale du sous-espace propre  $E_1$ , constitue une base orthonormale de  $\mathbb{C}^{2n}$
- d) la famille  $(X_1, X_2, \dots, X_{n+1}, \overline{X_1}, \overline{X_2}, \dots, \overline{X_{n-1}})$ , où  $(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$  est une base orthonormale du sous-espace propre  $E_1$ , constitue une base orthonormale de  $\mathbb{C}^{2n}$

Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  une base orthonormale, s'il en existe, du sous-espace propre  $E_1$ . On pose pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $n$ ,  $Z_j = X_j + \overline{X_j}$  et  $Z_{j+n} = i(X_j \overline{X_j})$ .

**Question 16.** On a alors, pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $n$ ,

- a)  $AZ_j = -Z_j$  et  $AZ_{j+n} = Z_{j+n}$
- b)  $AZ_{j+n} = -Z_j$  et  $AZ_j = -Z_{j+n}$
- c)  ${}^t Z_j Z_j = {}^t Z_{j+n} Z_{j+n} = 0$
- d)  ${}^t Z_j Z_j = {}^t Z_{j+n} Z_{j+n} = 1$

**Question 17.** Pour tout entier  $j$  et  $k$  compris entre 1 et  $n$ , on a

- a) si  $j$  et  $k$  sont distincts,  ${}^t Z_j Z_k = {}^t Z_{j+n} Z_{k+n} = 0$
- b)  ${}^t Z_j Z_k = {}^t Z_{j+n} Z_{k+n} = 0$

- c)  ${}^tZ_j Z_{k+n} = i \left( {}^tX_j X_k + \overline{{}^tX_j} X_k - \overline{{}^tX_j} X_k + \overline{{}^tX_j} X_k \right)$
- d) la famille  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  définie, pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $2n$  par  $\sqrt{2}Y_j = Z_j$  constitue une base orthonormale de  $\mathbb{R}^{2n}$

**Question 18.**  $J_n$  étant la matrice de  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  définie à la **question 6**, on a

- a) la matrice de l'endomorphisme  $f$  dans la base orthonormale  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{2n})$  définie à la question 17 est égale à  $-J_n$
- b) la matrice de l'endomorphisme  $f$  dans la base orthonormale  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{2n})$  définie à la question 17 est égale à  $J_n$
- c) la matrice de l'endomorphisme  $f$  dans la base orthonormale  $(Z_1, Z_2, \dots, Z_{2n})$  est égale à  $J_n$
- d) la matrice de passage  $P$  de la base canonique à la base  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{2n})$  définie à la question 7, appartient à  $\mathcal{O}_{2n}$  et est telle que  $J_n = {}^tPAP$

## PARTIE II

Pour  $x$  et  $z$  réels, on pose :

$$\Phi(z, x) = ze^{zx} / (e^z - 1) \text{ si } z \text{ est différent de } 0$$

$$\text{et } \Phi(z, x) = 1 \text{ si } z = 0$$

Soit une série entière complexe de terme général  $a_n Z^n$ , pour  $n$  entier naturel, de rayon de convergence  $R$ , réel strictement positif et telle que  $a_0 = 1$ . On note  $f(Z)$  la somme de cette série entière lorsque  $|Z| < R$ ,  $Z$  appartenant à  $\mathbb{C}$ ,  $|Z|$  désignant le module de  $Z$ . On introduit la suite  $b_n$  définie par  $b_0 = 1$  et  $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = 0$  pour tout  $n$  entier strictement positif.

**Question 19.** On considère un réel  $r$  dans l'intervalle  $]0, R[$

- a) la série numérique de terme général  $a_n r^n$  est divergente
- b) il existe une constante  $M$  strictement positive telle que  $|a_n| \leq M/r^n$  pour tout entier naturel  $n$
- c) pour tout réel  $K$  strictement positif on a, pour tout entier naturel  $n$ ,  $(K/r^n) \leq |a_n|$
- d) la série numérique de terme général  $a_n r^n$  converge mais n'est pas absolument convergente

**Question 20.**  $r$  désignant toujours un réel de l'intervalle  $]0, R[$ , on a

- a) il existe  $M$  strictement positif tel que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|b_n| \leq ((M+1)/r)^n$
- b) pour tout  $M$  strictement positif et pour tout entier naturel  $n$ ,  $|b_n| > ((M+1)/r)^n$
- c) la suite de terme général  $b_n t^n$  vérifie  $0 < |b_n| t^n \leq (t(M+1)/r)^n$  pour tout  $t$  réel
- d) la suite de terme général  $b_n t^n$  n'est pas bornée

**Question 21.**  $r$  étant toujours un réel fixé dans l'intervalle  $]0, R[$ , on obtient

- a) le rayon de convergence de la série entière de terme général  $b_n Z^n$  est nul
- b) le rayon de convergence de la série entière de terme général  $b_n Z^n$  est supérieur à  $r/(M+1)$  et par conséquent strictement positif
- c) il existe un réel strictement positif  $\rho$  tel que sur le disque ouvert  $D(0, \rho)$  de centre 0 et de rayon  $\rho$ , on ait  $f(Z) \sum_{n=0}^{\infty} b_n Z^n = 1$
- d) il n'existe pas de disque ouvert  $D(0, \rho)$ , de centre 0 et de rayon strictement positif  $\rho$  dans lequel on ait  $f(Z) \sum_{n=0}^{\infty} b_n Z^n = 1$

**Question 22.** On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\varphi(z) = (e^z - 1) / z \text{ si } z \text{ est différent de } 0 \text{ et } \varphi(0) = 1. \text{ On a}$$

- a) la fonction  $\varphi$  n'est pas développable en série entière sur  $\mathbb{R}$

- b) la fonction  $\varphi$  admet un développement en série entière au voisinage de 0 de terme général  $z^n/n!$  pour  $n$  entier strictement positif
- c) la fonction  $\varphi$  admet un développement en série entière au voisinage de 0 de terme général  $z^{n-1}/(n-1)!$  pour  $n$  entier strictement positif
- d) la fonction  $\varphi$  admet un développement en série entière au voisinage de 0 de terme général  $z^{n-1}/n$  pour  $n$  entier strictement positif

**Question 23.** On suppose qu'il existe un réel strictement positif  $\alpha$  tel que sur le disque ouvert  $D(0, \alpha)$ , de centre 0 et de rayon  $\alpha$ , la série entière complexe de terme général  $u_n Z^n$ , pour  $n$  entier naturel, converge et a pour somme la fonction  $\psi$  définie par  $\psi(Z) = Z/(e^Z - 1)$  si  $Z$  est différent de 0 et  $\psi(0) = 1$  et l'on note  $\Psi$  la fonction définie par  $\Psi(Z) = e^{Zx}\psi(Z)$  pour tout  $x$  réel,

- a)  $\alpha$  est nécessairement inférieur ou égal à  $2\pi$
- b)  $\alpha$  peut être strictement supérieur à  $2\pi$
- c) pour tout  $x$  réel et tout  $Z$  complexe appartenant à  $D(0, \alpha)$  on a

$$\Psi(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n x^n u_n Z^n / n!$$

- d) pour tout  $x$  réel et tout  $Z$  complexe appartenant à  $D(0, \alpha)$  on a

$$\Psi(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{p+q=n} Z^q x^q u_p Z^p / q! \right)$$

**Question 24.** Considérant la fonction  $\Phi$  définie dans le préambule de cette partie, on cherche à développer en série entière au voisinage de 0 la fonction, dépendant du paramètre réel  $x$ , qui à  $z$  réel associe  $\Phi(z, x)$ , si cela est possible, sous la forme

$$(1) \quad \Phi(z, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) z^n / n!$$

- a) il n'existe pas de suite de fonctions  $B_n$ ,  $n$  entier strictement positif, telle que (1) soit vérifiée
- b) il existe une suite de fonctions polynômes  $B_n$ ,  $n$  entier strictement positif, à coefficients réels telle que (1) soit vérifiée
- c) il existe une suite de fonctions polynômes  $B_n$ ,  $n$  entier strictement positif, à coefficients complexes non réels telle que (1) soit vérifiée
- d) une telle suite  $B_n$  est définie pour tout entier strictement positif  $n$  par

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n (n!/k!) u_{n-k} x^k \text{ où } u_0 = 1 \text{ et } u_n + \dots + u_0 / (n+1)! = 0 \text{ pour tout } n \text{ strictement positif}$$

**Question 25.** La suite de terme général  $B_n$  définie dans la question 24, si elle existe, vérifie pour tout  $x$  réel et pour tout entier strictement positif  $n$

- a)  $b_n(-x) = -B_n(x)$
- b)  $B_n(1-x) = -B_n(x)$
- c)  $B_n(-x) = B_n(x)$
- d)  $B_n(1-x) = (-1)^{n-1} B_n(x)$

**Question 26.** Pour tout réel  $x$  et pour tout  $n$  entier strictement positif, on a, si la suite de terme général  $B_n$  définie dans la question 24 existe

- a)  $B_n(1+x) = B_n(x)$
- b)  $B_n(1+x) = (-1)^n B_n(x)$
- c)  $B_n(1+x) - B_n(x) = nx^{n-1}$
- d)  $B_n(1+x) + B_n(x) = nx^{n-1}$

**Question 27.** On a, pour tout  $x$  réel, si les fonctions  $B_n$  existent

- a)  $B_1(x) = x - (1/2)$  et  $B_2(x) = (x^2 - x) / 2$
- b)  $B_1(x) = x - (1/2)$  et  $B_3(x) = x^3 + (3x^2/2) - (x/2)$
- c)  $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - (1/30)$  et  $B_5(x) = x^5 - (5x^4/2) + (5x^2/3) - (x/6)$
- d)  $B_2(x) = x^2 - x + (1/6)$  et  $B_3(x) = x^3 - (3x^2/2) + (x/2)$

**Question 28.** On considère toujours les fonctions  $B_n$  définies dans la question 24 par l'égalité (1)

- a) pour tout  $n$  entier strictement positif on a  $B_n(0) = 0$
- b) pour tout  $q$  entier naturel on a  $B_{2q+1}(0) = 0$  car pour tout  $x$  réel et pour tout  $n$  entier strictement positif,  $(-1)^n B_n(-x) = nx^{n-1} + B_n(x)$
- c) pour tout  $q$  entier strictement positif on a  $B_{2q}(0) = 0$  car pour tout  $x$  réel et pour tout entier strictement positif  $n$ ,  $-B_n(-x) = nx^{n-1} + B_n(x)$
- d) pour tout  $q$  entier naturel non nul,  $B_{2q+1}(0) = 0$  car pour tout  $n$  entier supérieur ou égal à 2 on a  $B_n(0) = (-1)^n B_n(0)$

**Question 29.** Reprenant la caractérisation des fonctions  $B_n$  donnée dans la question 24, on obtient pour tout  $x$  réel,  $B'_n$  désignant la dérivée de la fonction  $B_n$

- a)  $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$
- b)  $B'_n$  n'est définie pour aucun entier naturel  $n$
- c)  $B'_n(x) = nB_{n+1}(x)$  pour tout  $n$  entier supérieur ou égal à 1
- d)  $B'_n(x) = (1/(n+1)) B_{n+1}(x)$  pour tout  $n$  entier supérieur ou égal à 1

On désigne par  $g_n$ ,  $n$  étant un nombre entier supérieur ou égal à 2, la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de période 1, coïncidant sur le segment  $[0, 1]$  avec, lorsqu'elle existe, la fonction  $B_n$  définie dans la question 24 par la relation (1).

**Question 30.** Les fonctions  $g_n$ , ainsi définies, sont telles que

- a)  $g_n$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $n$  entier supérieur ou égal à 2, car  $g_n$  est 1-périodique et  $g_n(1) = B_n(1) = B_n(0) = g_n(0)$
- b)  $g_n$  est continue et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $n$  entier supérieur ou égal à 2 et, pour tout entier  $p$  strictement positif, la suite  $c_k(g_{2p+1})$  des coefficients de Fourier de  $g_{2p+1}$  est négligeable devant  $1/|k|$  à l'infini, car  $g_{2p+1}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$
- c) pour tout entier  $p$  strictement positif,  $g_{2p}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $g_{2p+1}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  mais seulement de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$
- d) pour tout entier  $p$  strictement positif,  $g_{2p}$  et  $g_{2p+1}$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  mais seulement de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$

**Question 31.** Les fonctions  $g_n$  vérifient

- a) pour tout  $n$  entier supérieur ou égal à 2,  $g_n$  est une fonction paire
- b) pour tout  $n$  entier supérieur ou égal à 2,  $g_n$  est une fonction impaire
- c) pour tout entier  $p$  strictement positif et pour tout  $x$  élément du segment  $[0, 1]$   
 $g_{2p}(x) = g_{2p}(1-x) = g_{2p}(-x)$  et  $g_{2p+1}(x) = -g_{2p+1}(1-x) = -g_{2p+1}(-x)$
- d) pour tout entier  $p$  strictement positif et pour tout  $x$  élément du segment  $[0, 1]$   
 $g_{2p}(x) = g_{2p}(1-x) = -g_{2p}(-x)$  et  $g_{2p+1}(x) = g_{2p+1}(1-x) = g_{2p+1}(-x)$

**Question 32.** Pour tout  $n$  entier supérieur ou égal à 2, la suite  $(S_p(g_n))$ ,  $p$  entier naturel, des sommes partielles associée à la série de Fourier de la fonction  $g_n$

- a) converge en moyenne quadratique vers la fonction  $g_n$  sur le segment  $[0, 1]$
- b) converge en moyenne quadratique vers la fonction  $g_n$  sur  $\mathbb{R}$
- c) converge normalement donc uniformément vers la fonction  $g_n$  sur  $\mathbb{R}$  car  $g_n$  est continue et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$

d) converge uniformément vers la fonction  $g_n$  sur  $\mathbb{R}$ , mais ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}$  car  $g_n$  n'est pas de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$

**Question 33.** Le développement en série de Fourier, suivant les fonctions sinus et cosinus, de la fonction  $g_n$ , pour  $n$  entier supérieur ou égal à 2, est défini pour tout  $x$  réel par :

a)  $g_n(x) = (a_0/2) + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(2\pi kx) + b_k \sin(2\pi kx))$  avec  $a_0 = 0$ ,  $a_k = (-1)^{n+1} 2n! / (2\pi k)^n = b_k$  pour tout  $k > 0$

b)  $g_{2p}(x) = (a_0/2) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx)$  avec  $a_k = (-1)^{p+1} (2p)! / (2\pi k)^{2p}$  pour tout  $k > 0$  et  $a_0 = 0$  pour  $p > 0$

c)  $g_{2p}(x) = (a_0/2) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx)$  avec  $a_k = (-1)^{p+1} (2p)! / (\pi k)^{2p}$  pour tout  $k > 0$  et  $a_0 = 0$  pour  $p > 0$

d)  $g_{2p+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(2\pi kx)$  avec  $b_k = (-1)^{p+1} 2(2p+1)! / (2\pi k)^{2p+1}$  pour tout  $k > 0$ , pour  $p > 0$

On pose, pour tout entier  $p$  supérieur ou égal à 1,  $\beta_p = (-1)^{p+1} B_{2p}(0)$  où  $B_{2p}$  est un terme de la suite de fonctions définie, si elle existe, dans la question 24.

On considère la fonction  $\zeta$  somme, lorsqu'elle existe, de la série de fonctions réelles de la variable réelle  $t$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)$  où  $v_n(t) = 1/n^t$  pour tout  $n$  entier strictement positif.

**Question 34.** La fonction  $\zeta$

- a) n'est définie en aucun point  $t$  de  $\mathbb{R}$
- b) est définie sur l'intervalle ouvert  $]1, +\infty[$  car la série numérique de terme général  $1/n^\gamma$  converge si et seulement si  $\gamma > 1$
- c) est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $]1, +\infty[$  car la série de terme général  $v_n$  est une série de fonctions de classe  $C^1$  sur  $]1, \infty[$ , convergeant simplement sur cet intervalle et telle que la série de terme général  $v'_n(t) = (-\ln n) / n^t$  converge normalement donc uniformément sur l'intervalle  $]1, +\infty[$
- d) est de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle  $]1, +\infty[$  car on établit, par application du théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, qu'elle est de classe  $C^\infty$  sur tout segment  $[a, b]$  de l'intervalle  $]1, +\infty[$

**Question 35.** La fonction  $\zeta$ , si elle est définie, tend vers

- a)  $+\infty$  lorsque  $t$  tend vers 1
- b) 0 lorsque  $t$  tend vers 1
- c) 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$
- d) 1 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  car  $0 < \sum_{n=2}^{\infty} v_n(t) \leq \{2/(t(t-1))\} \sum_{n=2}^{\infty} 1/(n-1)^2$  fonction qui tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$

**Question 36.** On obtient alors

- a) pour tout entier  $p$  supérieur ou égal à 1,  $\zeta(2p) = (2\pi)^{2p} \beta_p / ((2p)!)$
- b) pour tout entier  $p$  supérieur ou égal à 1,  $\zeta(2p) = (2\pi)^{2p} \beta_p / (2(2p)!)$
- c) lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ ,  $\beta_p$  est équivalent à  $4\sqrt{p\pi} (p/\pi e)^{2p}$  d'après la formule de Stirling
- d) lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ ,  $\beta_p$  est équivalent à  $2\sqrt{p\pi} (p/\pi e)^{2p}$  d'après la formule de Stirling

On considère la fonction  $g_1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de période 1, telle que  $g_1(0) = g_1(1) = 0$  et coïncidant sur l'intervalle ouvert  $]0, 1[$  avec la fonction polynôme  $x - (1/2)$

**Question 37.** La fonction  $g_1$

- a) est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$
- b) n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$  mais est de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$
- c) est paire
- d) est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  car la fonction polynôme  $x - (1/2)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$

**Question 38.** La suite  $(S_p(g_1))$ ,  $p$  entier naturel, des sommes partielles associée à la série de Fourier de la fonction  $g_1$

- a) converge en moyenne quadratique vers la fonction  $g_1$  sur le segment  $[0, 1]$
- b) converge normalement donc uniformément sur  $[0, 1]$
- c) ne converge simplement vers la fonction  $g_1$  que sur les intervalles ouverts de la forme  $]r, r + 1[$  où  $r$  est un entier relatif quelconque
- d) ne converge pas uniformément sur  $[0, 1]$  car la fonction  $g_1$ , somme de la série de fonctions continues sur  $[0, 1]$  de terme général  $-(\sin(2\pi kx))/(k\pi)$ , n'est pas continue au point 0

**Question 39.** Le développement en série de Fourier de la fonction  $g_1$  s'écrit sous la forme

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(2\pi nx))/(n\pi)$
- b)  $-\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(nx))/(n\pi)$
- c)  $-\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(n\pi x))/(n\pi)$
- d)  $-\sum_{n=1}^{\infty} (\cos(2\pi nx))/(n\pi)$

**Question 40.** On suppose dans cette question l'existence d'une constante  $K$  strictement positive telle que pour tout  $N$  entier supérieur ou égal à 1 et pour tout  $x$  appartenant à  $[0, 1]$   $G_N(x) = \sum_{n=1}^N (\sin(2\pi nx))/n$  vérifie  $|G_N(x)| \leq K$ . On considère une fonction  $h$ , continue sur  $[0, 1]$  dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes et on introduit  $(h_N)$ ,  $N$  entier supérieur ou égal à 1, la suite de fonctions de terme général  $h_N(x) = h(x)G_N(x)/\pi$  pour tout  $x$  appartenant à  $[0, 1]$ .

- a) la suite  $(h_N)$  converge simplement sur le segment  $[0, 1]$  vers la fonction  $h(x)((1/2) - x)$
- b) la suite  $(h_N)$  converge simplement sur l'intervalle  $]0, 1[$  vers la fonction  $h(x)((1/2) - x)$
- c) pour tout  $x$  appartenant à  $[0, 1]$  et pour tout  $N$  entier strictement positif  $|h_N(x)| \leq K$
- d) d'après le théorème de convergence dominée, la série numérique de terme général  $(1/\pi n) \int_0^1 h(x) \sin(2\pi nx) dx$ , pour  $n > 0$ , converge et a pour somme  $\int_0^1 h(x)((1/2) - x) dx$