ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2010**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE

◆

Épreuve optionnelle obligatoire de MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 3

◆

Ce sujet comporte :

1 page de garde
2 pages d'instructions pour remplir le QCM recto/verso
1 page « questions liées »
11 pages de texte recto/verso

◆

<u>CALCULATRICE AUTORISÉE</u>

QUESTIONS LIÉES

1 à 9
10 à 17
18 à 35
36 à 40

PARTIE I

$\mathbf{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels à une indéterminée X de degré inférieur ou égal à n. $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$) désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels (respectivement à coefficients complexes) où **R**(respectivement **C**) désigne le corps des réels(respectivement le corps des complexes).
On considère f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par

$$f(1) = 0$$
$$f(X^k) = k\,X^{k-1} \text{ pour tout entier } k \text{ compris entre 1 et } n$$

id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}_n[X]$.

Question 1 : f est

A) un endomorphisme nilpotent d'ordre $n-1$
B) un endomorphisme nilpotent d'ordre n
C) un automorphisme
D) un projecteur

Question 2 : On considère l'endomorphisme g de $\mathbf{R}_n[X]$ qui à un polynôme P(X) associe le polynôme P(X+1). La matrice de g dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$

A) n'est pas inversible car son déterminant est nul
B) est inversible
C) est triangulaire à diagonale nulle
D) est triangulaire supérieure

Question 3 : L'endomorphisme g peut s'écrire sous la forme

A) $g = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f^k/k$

B) $g = \sum_{k=1}^{n-1} f^k/k$

C) $g = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^k/(k!)$

D) $g = \sum_{k=1}^{n-1} f^k/(k!)$

Tournez la page S.V.P.

Question 4 : On en déduit que l'endomorphisme $(g - \mathrm{id})$

A) est nilpotent d'ordre n
B) est de rang 1
C) est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$
D) n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ mais est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Question 5 : Soit p un entier supérieur ou égal à 2.
Soit h un endomorphisme nilpotent d'ordre p. On pose $\exp(h) = \sum_{k=0}^{p-1} h^k/(k!)$

A) $\exp(h)$ est un automorphisme
B) $\exp(h)$ est de rang $p-1$
C) $\exp(h)$ est nilpotent comme somme d'endomorphismes nilpotents
D) $\exp(h) - id$ est nilpotent comme somme d'endomorphismes nilpotents

Question 6 : Soit m un entier strictement positif. On considère les polynômes e_m et l_m définis par

$$e_m(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{X}^k/(k!) \quad \text{et} \quad l_m(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} (\mathrm{X} - 1)^k/k$$

On a

A) $l_m(e_m(\mathrm{X})) = 1$
B) $l_m(e_m(\mathrm{X})) = \mathrm{X}$
C) $l_m(e_m(\mathrm{X})) = \mathrm{X} + \mathrm{X}^{m+1}\mathrm{P}(\mathrm{X})$ avec P polynôme de degré inférieur ou égal à m
D) $l_m(e_m(\mathrm{X})) = 1 + \mathrm{X}^{m+1}\mathrm{P}(\mathrm{X})$ avec P polynôme de degré inférieur ou égal à m

Question 7 : Reprenant les hypothèses et notations des questions **5** et **6**, on a

A) $l_{p-1}(h) = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} (h - 1)^k/k$

B) $l_{p-1}(h) = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} h^k/k$

C) $l_{p-1}(h) = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} (h - id)^k/k$

D) $l_{p-1}(h) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} (h - id)^k/k$

Question 8 : Reprenant les hypothèses et notations des questions **5** et **6**, on montre que l'endomorphisme $l_{p-1}(\exp(h))$ est

A) nilpotent d'ordre p
B) égal à l'endomorphisme h
C) égal à l'endomorphisme id
D) égal à l'endomorphisme $id+h$

Question 9 : Reprenant les notations de la question **3**, on déduit que l'endomorphisme f peut s'écrire sous la forme

A) $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1}(g-id)^k/k$

B) $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1}\, g^k/k$

C) $\sum_{k=1}^{n-1} g^k/(k!)$

D) $\sum_{k=1}^{n-1} (g-id)^k/k$

PARTIE II

On considère les matrices A et B appartenant à l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels définies par

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note f (respectivement g) l'endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice A (respectivement B) c'est-à-dire l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $(e_i)_{i=1,3}$ de $\mathbf{R}^3$ est A (respectivement B)

R désigne le corps des réels, id désigne l'endomorphisme identité de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ et I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$

Question 10 : L'endomorphisme f

A) est un endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ autoadjoint car la matrice A est symétrique réelle
B) n'est pas diagonalisable
C) est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de f
D) est un automorphisme

Question 11 : On a

A) 0 n'appartient pas au spectre de f car f est bijectif

B) 0 est valeur propre de f de multiplicité m_0 inférieure ou égale à 1 car

$$m_0 < \dim \operatorname{Ker} f = 3 - \operatorname{rg} f = 2$$

C) 0 est valeur propre de f de multiplicité m_0 strictement supérieure à 1 car

$$m_0 > \dim \operatorname{Ker} f = 3 - \operatorname{rg} f = 1$$

D) 0 est valeur propre de f de multiplicité $m_0 = 1$ car, f étant diagonalisable,

$$m_0 = \dim \operatorname{Ker} f = 3 - \operatorname{rg} f = 1$$

Question 12 : L'endomorphisme g

A) est un endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ autoadjoint car la matrice B est symétrique réelle

B) est bijectif

C) ne peut être bijectif car la matrice B n'est pas symétrique

D) ne peut être bijectif car la matrice B n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$

Question 13 : On note χ_f (respectivement χ_g) le polynôme caractéristique de f (respectivement g). On a

A) $\chi_f(X) = \det(f - X\, id) = X^3 - 18X^2 + 81X$

B) $\chi_f(X) = \det(f - X\, id) = -X(9-X)^2$

C) $\chi_g(X) = \det(g - X\, id) = -X(1-X)^2$

D) $\chi_g(X) = \det(g - X\, id) = -X^3 + 3X^2 - 3X + 1$

Question 14 : L'ensemble des polynômes annulateurs de l'endomorphisme f

A) est un idéal contenant le polynôme $X(X-9)$ car la matrice A est diagonalisable

B) ne contient pas le polynôme $X(X-9)$

C) contient le polynôme $X^3 - 18X^2 + 81X$ car, d'aprés le théorème de Cayley Hamilton, le polynôme caractéristique χ_f est annulateur de l'endomorphisme f

D) est un idéal contenant le polynôme $(X-9)$

Question 15 : L'ensemble des polynômes annulateurs de l'endomorphisme g

A) contient le polynôme $X(X-1)$ car la matrice B est diagonalisable

B) ne contient pas le polynôme $X(X-1)$ car l'endomorphisme g n'est pas diagonalisable puisque la matrice B–I est de rang 2

C) est un idéal contenant le polynôme $(X-1)^2$

D) contient le polynôme $-X^3 + 3X^2 - 3X + 1$ car, d'aprés le théorème de Cayley Hamilton, le polynôme caractéristique χ_g est annulateur de l'endomorphisme g

Question 16 : Pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a

A) $X^k = Q(X)X(X-9) + 9^{k-1}X$
B) $X^k = Q(X)X(X-9)^2 + 9^kX$
C) $X^k = Q(X)(X-1)^2 + (k-1)X^2 + (2-k)X$
D) $X^k = Q(X)X(X-1)^2 + (k-1)X^2 + (2-k)X$

Question 17 : On en déduit

A) $A^k = 9^kA$ pour tout entier k supérieur ou égal à 3
B) $A^k = 9^{k-1}A$ pour tout entier k supérieur ou égal à 1
C) $B^k = (2-k)B^2 + (k-1)B$ pour tout entier k supérieur ou égal à 3
D) $B^k = (k-1)B^2 + (2-k)B$ pour tout entier k supérieur ou égal à 1

PARTIE III

Soit (u_n), n entier naturel, une suite de nombres réels non nuls. Pour tout entier naturel n, on pose

$$P_n = \prod_{i=0}^{n} u_i$$

Si la suite (P_n), n entier naturel, possède une limite finie non nulle l, on écrira:

$$\prod_{i=0}^{+\infty} u_i = l$$

et on dira que le produit infini est convergent. Dans les autres cas, y compris si $l = 0$, on dira que le produit infini est divergent.

Question 18 : Le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+(1/n))$ est

A) convergent car la suite $(1/n)$, n entier strictement positif, converge vers 0
B) divergent car pour tout n entier strictement positif $1+(1/n)>1$
C) divergent car la suite des produits partiels $\prod_{i=1}^{n}(1+(1/i))$, n entier strictement positif, converge vers 0
D) divergent car la suite des produits partiels $\prod_{i=1}^{n}(1+(1/i))$, n entier strictement positif, converge et a pour limite $+\infty$

Tournez la page S.V.P.

Question 19 : Pour qu'un produit infini $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ soit convergent

A) il faut que la suite (u_n) converge vers 1
B) il faut et il suffit que la suite (u_n) converge vers 1
C) il suffit que la suite (u_n) ne converge pas vers 0
D) il suffit que la suite (u_n) ne tende pas vers $+\infty$

Question 20 : En notant P_n le terme général de la suite des produits partiels associée à $P=\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$, on a

A)le produit infini P est divergent si et seulement si (P_m/P_n) tend vers 0 lorsque m et n tendent vers $+\infty$
B)le produit infini P est convergent si et seulement si (P_m/P_n) tend vers 1 lorsque m et n tendent vers $+\infty$
C) pour que le produit infini P soit divergent il est nécessaire que (P_m/P_n) tende vers 0 lorsque m et n tendent vers $+\infty$
D) pour que le produit infini P soit convergent il est nécessaire que (P_m/P_n) tende vers 1 lorsque m et n tendent vers $+\infty$

Question 21 : On désigne par ln le logarithme népérien. Dans le cas où (u_n), n entier naturel, est une suite à termes réels strictement positifs, on en déduit, reprenant les notations de la question **20**, que

A) le produit infini P est convergent si et seulement si la série de terme général $\ln u_n$, n entier naturel, converge
B) le produit infini P est divergent si et seulement si la série de terme général $\ln u_n$, n entier naturel, diverge vers $-\infty$
C) le produit infini P est divergent si la série de terme général $\ln u_n$, n entier naturel, diverge
D) le produit infini P est convergent si et seulement si la série de terme général $\ln u_n$, n entier naturel, ne diverge pas vers $+\infty$

Question 22 : Soit α un paramètre réel. En utilisant le résultat de la question précédente, on montre que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1+(1/n^{\alpha})) \text{ est}$$

A) divergent si $\alpha < 2$
B) divergent si $\alpha \leq 1$
C) convergent si $1 \leq \alpha$
D) convergent si $\alpha > 0$

On étudie dorénavant la cas particulier du produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+(1/n^2))$.

On considère les applications f et g définies sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x$$
$$g(x) = \ln(1+x) - x + (x^2/2)$$

ln désignant la fonction logarithme népérien

Question 23 : On a

A) f admet un maximum en 0
B) f admet un minimum en 0
C) g admet un minimum en 0
D) g admet un point d'inflexion en 0

Question 24 : Les fonctions f et g vérifient

A) g est positive sur I
B) f est négative sur I
C) f est positive sur $[0, +\infty[$
D) g est négative sur $[0, +\infty[$

Question 25 : On obtient

A) $x - (x^2/2) \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$
B) $x - (x^2/2) \leq \ln(1+x) < x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$
C) $x - (x^2/2) \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1, 0]$
D) $x \leq \ln(1+x) \leq x - (x^2/2)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1, 0]$

Question 26 : On en déduit que la série de terme général $\ln(1+(1/n^2))$, n entier strictement positif, est

A) divergente
B) est convergente mais non absolument convergente
C) est absolument convergente donc convergente
D) est convergente car pour qu'une série converge il suffit que son terme général tende vers 0

Soit h la fonction réelle de la variable réelle 2-périodique et définie sur l'intervalle $[-1, 1[$ par:
$h(t) = t$
R désigne l'ensemble des nombres réels.

Question 27 : L'application h

A) est périodique, de classe C^1 donc h admet un développement en série de Fourier

B) est périodique, impaire, continue de classe C^1 par morceaux donc h admet un développement en série de Fourier

C) admet un développement en série de Fourier de la forme $S_h(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n t)$

D) admet un développement en série de Fourier de la forme $S_h(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\pi n t)$

Question 28 : Le développement en série de Fourier de la fonction h, s'il existe,

A) converge simplement vers h sur **R**

B) converge simplement vers h sur $\mathbf{R} - \{2k+1,\ k$ entier relatif$\}$

C) converge simplement vers la fonction S_h définie par $S_h(t) = h(t)$ pour tout t réel n'appartenant pas à l'ensemble des entiers relatifs impairs et $S_h(2k+1) = 0$ pour tout k entier relatif

D) converge simplement vers h sur $[-1, 1[$

Question 29 : Le développement en série de Fourier de la fonction h, s'il existe,

A) converge en moyenne quadratique vers h sur $]-1, 1[$

B) converge en moyenne quadratique vers h sur **R**

C) converge uniformément sur $[-1, 1[$ car h est continue sur $[-1, 1[$

D) converge uniformément sur **R**

Question 30 : La formule de Parseval

A) ne s'applique pas car la série ne converge pas uniformément sur **R**

B) ne s'applique pas car la série ne converge pas simplement vers h sur **R**

C) s'applique et donne $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$

D) s'applique et donne $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/4$

On considère la fonction H 2-périodique définie sur $[-1, 1[$ par:

$$H(x)=\int_{-1}^{x} h(t)dt$$

Question 31 : La fonction H est

A) dérivable sur **R** et sa dérivée est égale à h
B) impaire car la fonction h est impaire
C) paire car la fonction h est paire
D) périodique, de classe C^1 donc H admet un développement en série de Fourier

Question 32 : Le développement en série de Fourier de la fonction H, s'il existe,

A) converge en moyenne quadratique vers H sur **R**
B) ne converge pas uniformément sur **R** car h n'est pas continue sur **R**
C) n'est pas absolument convergent sur **R** car h n'est pas continue sur **R**
D) converge normalement donc uniformément sur **R**

Question 33 : Le développement en série de Fourier de la fonction H, s'il existe, est de la forme

$$a_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(\alpha nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(\alpha nt) \qquad \text{avec}$$

A) $a_0 = 0$, $\alpha = 2\pi$ et pour tout n entier strictement positif a_n et b_n non nuls
B) $a_0 = 0$, $\alpha = \pi$
C) $a_0 = -2/3$, $\alpha = 2$ et pour tout n entier strictement positif $b_n = 0$
D) $a_0 = -2/3$, $\alpha = 1$ et pour tout n entier strictement positif $b_n = 0$

Question 34 : On en déduit, en appliquant la formule de Parseval à la fonction H, que la série numérique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^4 \quad \text{a pour somme S}$$

A) $S = \pi^4/6$
B) $S = \pi^4/90$
C) $S = \pi^3/6$
D) $S = \pi^3/90$

Question 35 : On montre alors que le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty} (1+(1/n^2))$

A) diverge vers $+\infty$
B) diverge vers 0
C) converge et la limite l de la suite des produits partiels vérifie $3 \leq l \leq 6$
D) converge et la limite l de la suite des produits partiels vérifie $4 \leq l \leq 5$

PARTIE IV

On considère la fonction f, de la variable réelle t, définie sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ par
$f(t) = (\ln(1+xt^2))/(t(1+t^2))$, x étant un paramètre réel
R désigne l'ensemble des nombres réels

Question 36 : La fonction f

A) est définie continue sur $]0, +\infty[$ pour tout x réel
B) est définie continue sur $]0, +\infty[$ uniquement pour x réel strictement positif
C) n'est pas définie pour x réel strictement négatif car dans ce cas $1+xt^2$ est strictement négatif pour tout t strictement inférieur à $1/\sqrt{(-x)}$
D) est, dans le cas où x est un réel strictement positif, prolongeable par continuité en **0** par **0** car $f(t)$ est équivalente à $xt/(1+t^2)$

Question 37 : La fonction f

A) est négative sur $]0,+\infty[$ pour tout x réel positif
B) n'est pas de signe constant sur $]0,+\infty[$ pour x réel positif
C) est équivalente en $+\infty$ à $1/t^2$ pour tout x réel strictement positif
D) est, en $+\infty$, telle que $f(t)=o(1/t^2)$ pour tout x réel strictement positif

Question 38 : La fonction f

A) n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout x réel positif

B) est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout x réel positif car toute fonction continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et ayant une limite nulle en $+\infty$, est intégrable sur $[0,+\infty[$

C) n'est intégrable sur $]0,+\infty[$ que pour x réel strictement positif

D) est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout x réel positif car la fonction f est positive, continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et majorée en $+\infty$ par $1/t^2$, fonction intégrable sur $]1,+\infty[$

Question 39 : La fonction f

A) est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ pour tout x réel positif car elle est intégrable sur $[0,+\infty[$ et impaire pour tout x réel positif

B) n'est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ pour aucun x réel car elle n'est pas définie en 0

C) est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ pour tout x réel car elle est intégrable sur $[0,+\infty[$ et impaire pour tout x réel

D) est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ pour tout x réel positif car toute fonction continue sur $]-\infty,+\infty[$ est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$

Question 40 : On note F la fonction qui au couple (x,t) associe $(\ln(1+xt^2))/(t(1+t^2))$. On a

A) $F(x,t) = \phi(xt^2).(xt/(1+t^2))$ pour tout couple (x,t) appartenant à $[0,+\infty[x[0,+\infty[$ où $\phi(u)= (\ln(1-u))/u$ pour tout u appartenant à $]1,+\infty[$

B) $F(x,t) = \phi(xt^2).(xt/(1+t^2))$ pour tout couple (x,t) appartenant à $[0,+\infty[x[0,+\infty[$ où $\phi(u)= (\ln(1+u))/u$ pour tout u appartenant à $]-1,+\infty[$

C) la fonction ψ définie sur $]-1,+\infty[$ par $\psi(u)= (\ln(1+u))/u$ pour u non nul et $\psi(0)= 1$ est développable en série entière au voisinage de 0 de rayon de convergence égal à 1 donc ψ est de classe C^∞ sur $]-1,1[$

D) F est de classe C^1 sur $[0,+\infty[x[0,+\infty[$ comme produit de 2 fonctions de classe C^1