CONCOURS COMMUN 2001

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques

(toutes filières)

PROBLEME 1

PARTIE A

A.1. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Pour $t > 0$, $g_a(t) = e^{a \ln t}$. Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures $a \ln t$ tend vers $-\infty$ si $a > 0$ et vers 0 si $a = 0$ et donc $g_a(t)$ tend vers 0 si $a > 0$ et vers 1 si $a = 0$.

On peut donc prolonger par continuité la fonction g_a en 0 en posant

$$\boxed{g_a(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } a > 0 \\ 1 \text{ si } a = 0 \end{cases}.}$$

Soit a un réel supérieur ou égal à 1.
- g_a est continue sur $\mathbb{R}^+$;
- g_a est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour $t > 0$, $g'_a(t) = at^{a-1} = ag_{a-1}(t)$;
- puisque $a - 1 \geq 0$, la fonction $g'_a = ag_{a-1}$ a une limite réelle quand t tend vers 0.

D'après un théorème classique d'analyse,

$$\boxed{\forall a \geq 1,\ g_a \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+.}$$

A.2. Soient a et b deux réels positifs.
Si t est un réel de $[0, 1]$, $1 - t$ l'est aussi. On en déduit que la fonction $t \mapsto g_a(t)g_b(1 - t)$ est continue sur $[0, 1]$ et donc que $I(a, b)$ existe.

On pose $u = 1 - t$. On obtient

$$I(a, b) = \int_0^1 g_a(t)g_b(1 - t)\ dt = \int_1^0 g_a(1 - u)g_b(u)\ (-du) = \int_0^1 g_b(u)g_a(1 - u)\ du = I(b, a).$$

$$\boxed{\forall (a, b) \in [0, +\infty[^2,\ I(a, b) = I(b, a).}$$

A.3. Soient a et b deux réels positifs ou nuls. Puisque $a + 1 \geq 1$ et $b + 1 \geq 1$, les deux fonctions $t \mapsto t^{a+1}$ et $t \mapsto \dfrac{-(1 - t)^{b+1}}{b + 1}$ sont de classe C^1 sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} I(a + 1, b) &= \int_0^1 t^{a+1}(1 - t)^b\ dt = \left[t^{a+1}\frac{-(1 - t)^{b+1}}{b + 1}\right]_0^1 - \int_0^1 (a + 1)t^a \frac{-(1 - t)^{b+1}}{b + 1}\ dt \\ &= \frac{a + 1}{b + 1}\int_0^1 t^a(1 - t)^{b+1}\ dt = \frac{a + 1}{b + 1} I(a, b + 1). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ (b + 1)I(a + 1, b) = (a + 1)I(a, b + 1).}$$

A.4. Soit a un réel positif. $I(a,0) = \int_0^1 t^a \, dt = \left[\dfrac{t^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{a+1}$.

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+, \ I(a,0) = \frac{1}{a+1}.}$$

Soit alors n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}I(a,n) &= \frac{n}{a+1} I(a+1, n-1)\\ &= \frac{n}{a+1}\frac{n-1}{a+2}\dots\frac{1}{a+n} I(a+n,0) = \frac{n(n-1)\dots 2.1}{(a+1)(a+2)\dots(a+n+1)}\\ &= \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n+1)},\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$.

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ I(a,n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n+1)}.}$$

A.5. Soient p et q deux entiers naturels. d'après ce qui précède,

$$I(p,q) = \frac{q!}{(p+1)(p+2)\dots(p+q+1)} = \frac{q!1.2.\dots p}{1.2.\dots p.(p+1)(p+2)\dots(p+q+1)} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.}$$

A.6. Soient r et q deux entiers naturels. Alors $2p+1 \geq 0$ et $2q+1 \geq 0$. On en déduit que la fonction $\theta \mapsto \cos^{2p+1}\theta \sin^{2q+1}\theta$ est continue sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ et donc que $J(p,q)$ existe.

Effectuons le changement de variables $t = \sin^2\theta$. On a alors $dt = 2\sin\theta\cos\theta \, d\theta$ puis

$$J(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}\theta \cos^{2q+1}\theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^p (1-\sin^2\theta)^q . \sin\theta\cos\theta \, d\theta = \int_0^1 t^p (1-t)^q \, \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} I(p,q).$$

$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \ J(p,q) = \frac{p!q!}{2(p+q+1)!}.}$$

PARTIE B

B.1. Soit a un réel strictement positif. Pour x réel,

$$f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow 1 - \frac{a}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-a}{x} > 0 \Leftrightarrow x(x-a) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[.$$

$$\boxed{\forall a > 0, \ \mathscr{D}_{f_a} =]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[.}$$

B.2. Soient a et x deux réels tels que $0 < a < x$. Pour $t \in [x-a, x]$, posons $f(t) = \ln t$. f est dérivable sur $[x-a, x]$ (car $x - a > 0$) et en particulier continue sur $[x-a, x]$, dérivable sur $]x-a, x[$. De plus, pour $t \in]x-a, x[$,

$$\frac{1}{x} \leq f'(t) = \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x-a}.$$

L'inégalité des accroissements finis permet alors d'écrire

$$\frac{1}{x}(x - (x-a)) \leq \ln(x) - \ln(x-a) \leq \frac{1}{x-a}(x - (x-a)),$$

et donc

$$\boxed{\forall (a,x) \in \mathbb{R},\ \left(0 < a < x \Rightarrow \frac{a}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-a) \leq \frac{a}{x-a}\right.}$$

B.3. Pour $x > a$, on a $f(x) = x(\ln(x-a) - \ln(x))$ et donc

$$f'(x) = (\ln(x-a) - \ln(x)) + x\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x}\right) = \ln(x-a) - \ln(x) + \frac{a}{x-a} \geq 0 \text{ (d'après B.2.)}.$$

$$\boxed{\forall a > 0,\ f_a \text{ est croissante sur }]a, +\infty[.}$$

Quand x tend vers a par valeurs supérieures, $\ln(x-a) - \ln(x)$ tend vers $-\infty$ et puisque $a > 0$, il en est de même de $x(\ln(x-a) - \ln(x))$.

$$\boxed{\forall a > 0,\ \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f_a(x) = -\infty.}$$

Quand x tend vers $+\infty$, $-\dfrac{a}{x}$ tend vers 0 et donc $x \ln\left(1 - \dfrac{a}{x}\right) \sim x.\left(-\dfrac{a}{x}\right) = -a$.

$$\boxed{\forall a > 0,\ \lim_{a \to +\infty} f_a(x) = -a.}$$

On en déduit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à $\mathcal{C}_a$ de même que la droite d'équation $y = -a$ est asymptote à $\mathcal{C}_a$ en $+\infty$.

Tableau de variation de f_a

x	a	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ $\nearrow$	$-a$

B.4. Voir figure page suivante.

B.5. Soit $a > 0$. Pour n entier naturel strictement supérieur à a, $1 - \dfrac{a}{n} > 0$ et

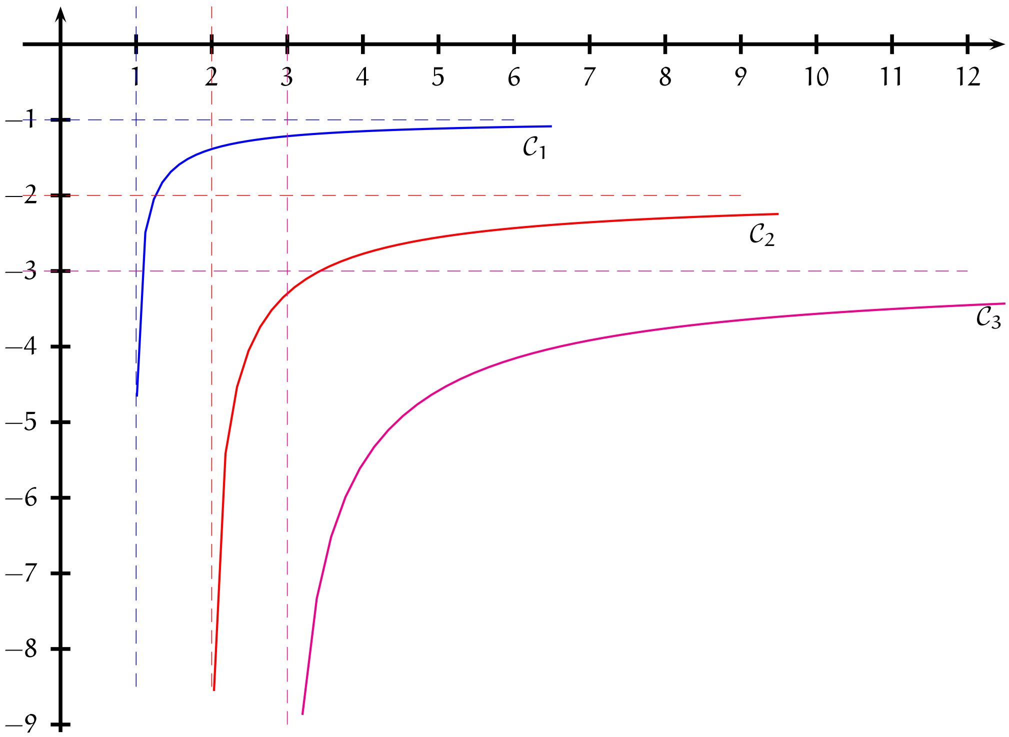
$$y_n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right)\right) = \exp(f_a(n)).$$

Puisque f_a est une fonction strictement croissante sur $]a, +\infty$, pour tout entier n strictement supérieur à a, on a en particulier $f_a(n) < f_(n+1)$ et donc $y_n < y_{n+1}$.

$$\boxed{\text{la suite } (y_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

D'autre part, quand n tend vers $+\infty$, $f_a(n)$ tend vers $-a$ et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} y_n = e^{-a}.}$$



PARTIE C

C.1. Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $t = \dfrac{u}{n}$ et donc $u = nt$ et $du = n\ dt$, on obtient

$$F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x\ du = \int_0^1 (1-t)^n (nt)^x (n\ dt) = n^{x+1} \int_0^1 t^x (1-t)^n\ dt = n^{x+1} I(x,n).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n(x) = n^{x+1} I(x,n).}$$

C.2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(x) - F_n(x) &= \int_0^{n+1} \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x\ du - \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x\ du \\
&= \int_0^n \left(\left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n\right) u^x\ du + \int_n^{n+1} \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x\ du \\
&= \int_0^n (y_{n+1}(u) - y_n(u)) u^x\ du + \int_n^{n+1} y_{n+1}(u) u^x\ du.
\end{aligned}$$

Déjà $\displaystyle\int_n^{n+1} y_{n+1}(u) u^x\ du \geq 0$ par positivité de l'intégrale. D'autre part, d'après B.5, pour tout réel positif u et n entier strictement supérieur à u, on a $y_{n+1}(u) - y_n(u) \geq 0$. Par suite, pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel u de $[0,n]$, on a $(y_{n+1}(u) - y_n(u))u^x \geq 0$ (l'inégalité étant claire quand $u = n$). Mais alors, $\displaystyle\int_0^n (y_{n+1}(u) - y_n(u)) u^x\ du \geq 0$ et finalement $F_{n+1}(x) - F_n(x) \geq 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \text{la suite } (F_n(x)) \text{ est croissante.}}$$

C.3. Soit x un réel positif.

a. D'après les théorèmes de croissances comparées, $\lim\limits_{u\to+\infty} u^{x+2}e^{-u} = 0$. Par définition de la limite (« avec $\varepsilon = 1$ »), il existe un réel U tel que, pour $u \geq U$, on a $e^{-u}u^{x+2} \leq 1$ et donc

$$\boxed{\exists U > 0/\ \forall u \in \mathbb{R}^+,\ \left(u \geq U \Rightarrow e^{-u} \leq \frac{1}{u^{x+2}}\right).}$$

b. Soit u un réel et n un entier naturel tels que $0 < u < n$. La question B.2. fournit $\ln(n) - \ln(n-u) \geq \dfrac{u}{n}$ et donc

$$\ln\left(1 - \frac{u}{n}\right) = \ln(n-u) - \ln(n) \leq -\frac{u}{n},$$

ou enfin

$$\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{u}{n}\right)\right) \leq \exp(n.(-\frac{u}{n})) = e^{-u}.$$

Cette majoration reste clairement vraie quand $u = 0$ ou $u = n$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in [0, n],\ \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x\ du \leq \int_0^n e^{-u}u^x\ du.$$

Soit de nouveau n un entier naturel non nul.

- **Premier cas.** Si $n \leq U$, alors

$$F_n(x) \leq \int_0^n e^{-u}u^x\ du \leq \int_0^n e^{-u}u^x\ du + \int_n^U e^{-u}u^x\ du = \int_0^U e^{-u}u^x\ du \leq \int_0^U e^{-u}u^x\ du + \frac{1}{U}.$$

- **Deuxième cas.** Si $n > U$, alors

$$\begin{aligned}
F_n(x) &\leq \int_0^n e^{-u}u^x\ du = \int_0^U e^{-u}u^x\ du + \int_U^n e^{-u}u^x\ du \\
&\leq \int_0^U e^{-u}u^x\ du + \int_U^n \frac{1}{u^{x+2}}u^x\ du \quad \text{(par définition de } U \text{ et puisque } n > U) \\
&= \int_0^U e^{-u}u^x\ du + \int_U^n \frac{1}{u^2}\ du = \int_0^U e^{-u}u^x\ du + \left[-\frac{1}{u}\right]_U^n \\
&= \int_0^U e^{-u}u^x\ du + \frac{1}{U} - \frac{1}{n} \\
&\leq \int_0^U e^{-u}u^x\ du + \frac{1}{U}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n(x) \leq \int_0^U e^{-u}u^x\ du + \frac{1}{U}.}$$

c. Le réel $\int_0^U e^{-u}u^x\ du + \dfrac{1}{U}$ ne dépend pas de n. Donc la suite $(F_n(x))$ est majorée. D'autre part, la suite $(F_n(x))$ est croissante d'après la question C.2. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (F_n(x)) \text{ converge.}}$$

C.4. Soit x un réel positif et n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
F_n(x+1) &= n^{x+2}I(x+1,n) \quad \text{(par définition d'après C.1.)}\\
&= n^{x+2}\frac{x+1}{n+1}I(x,n+1) \quad \text{(d'après A.3.)}\\
&= (x+1)n^{x+2}\frac{1}{n+1}\frac{1}{(n+1)^{x+1}}(n+1)^{x+1}I(x,n+1)\\
&= (x+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{x+2}F_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente,on obtient $F(x+1)=(x+1).1.F(x)=(x+1)F(x)$. On a montré que

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^+,\ F(x+1)=(x+1)F(x).}$$

Calculons tout d'abord $F(0)$. Pour tout entier naturel non nul, d'après la question A.5, on a

$$F_n(0)=n^1I(0,n)=n\frac{0!n!}{(n+1)!}=\frac{n}{n+1}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $F(0)=1$.

Soit alors k un entier naturel non nul.

$$F(k)=kF(k-1)=k(k-1)\dots 1F(0)=k!,$$

ce qui reste vrai quand $k=0$.

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ F(k)=k!.}$$

PROBLEME 2

PARTIE A

A.1. Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. Puisque $A^3 = 0$ et $A^4 = A^3.A = 0$, on a

$$E(s)E(t) = (I + sA + \frac{s^2}{2}A^2)(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2) = I + (s+t)A + (\frac{s^2}{2} + st + \frac{t^2}{2})A^2$$
$$= I + (s+t)A + \frac{(s+t)^2}{2}A^2 = E(s+t)$$

$$\boxed{\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ E(s)E(t) = E(s+t).}$$

A.2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ (E(t))^n = E(nt)$.

- On a déjà $(E(t))^0 = I = E(0.t)$et la formule proposée est donc vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $(E(t))^n = E(nt)$. Alors, d'après A.1. et par hypothèse de récurrence,

$$(E(t))^{n+1} = (E(t))^n E(t) = E(nt)E(t) = E(nt + t) = E((n+1)t).$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ (E(t))^n = E(nt).}$$

A.3. Soit $t \in \mathbb{R}$. $E(t)E(-t) = E(-t)E(t) = E(t-t) = E(0) = I$. Par suite,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ E(t) \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R}) \text{ et } (E(t))^{-1} = E(-t).}$$

A.4. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Puisque $A^3 = A^4 = 0$ et que $A^2 \neq 0$, on a

$$\alpha I + \beta A + \gamma A^2 = 0 \Rightarrow A^2(\alpha I + \beta A + \gamma A^2) = 0 \Rightarrow \alpha A^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Puis,

$$\beta A + \gamma A^2 = 0 \Rightarrow A(\beta A + \gamma A^2) = 0 \Rightarrow \beta A^2 = 0 \Rightarrow \beta = 0.$$

Puis $\gamma A^2 = 0$ et donc $\gamma = 0$.

On a montré que la famille

$$\boxed{(I, A, A^2) \text{ est une famille libre de l'espace vectoriel } \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).}$$

A.5. Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. Puisque la famille (I, A, A^2) est libre, on peut identifier les coefficients :

$$E(s) = E(t) \Rightarrow I + sA + \frac{s^2}{2}A^2 = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \Rightarrow s = t.$$

On a montré que $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ [E(s) = E(t) \Rightarrow s = t]$ et donc

$$\boxed{\text{L'application } t \mapsto E(t) \text{ est donc injective.}}$$

A.6. On trouve $A = E_{1,2} + E_{1,3} + E_{2,3}$, puis $A^2 = E_{1,3}$ et $A^3 = 0$. Par suite,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ E(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

PARTIE B

B.1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \in F \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - 3y = 0.$$

Donc $F = \text{Vect}(\vec{u})$ où $\vec{u} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, et en particulier, F est une droite vectorielle.

$$x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \in G \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - 2y = 0.$$

Donc $G = \text{Vect}(\overrightarrow{v})$ où $\vec{v} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ et en particulier, G est une droite vectorielle.

Enfin, pour $\overrightarrow{w}$ vecteur donné,

$$\overrightarrow{w} \in F \cap G \Rightarrow f(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{w} \Rightarrow \overrightarrow{w} = 0.$$

Donc, $F \cap G = \{0\}$, et puisque $\dim F + \dim G = 1 + 1 = 2$, on a montré que

$$\boxed{\mathbb{R}^2 = F \oplus G.}$$

B.2. Puisque $f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}$ et que $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$,

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \text{diag}(2, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

B.3. Les formules de changement de bases s'écrivent

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}}.\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f).\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_0},$$

ou encore, si on pose $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}}$ et $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, P et D sont respectivement une matrice inversible et une matrice diagonale telles que

$$A = P.D.P^{-1}.$$

D'après B.2., $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis d'après B.1., $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et enfin $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

B.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $D^n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n)$, on a

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite,

$$A^n = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f^n) = P.\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n).P^{-1} = PD^nP^{-1}$$

(ou bien $A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PDP^{-1}) = PD....DP^{-1} = PD^nP^{-1}$). Par suite,

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2^n & 2 \\ 2^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & -6.2^n + 6 \\ 2^n - 1 & -2.2^n + 3 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & -6.2^n + 6 \\ 2^n - 1 & -2.2^n + 3 \end{pmatrix}.}$$

PARTIE C.

C.1. Soient t un réel et n un entier naturel. Puisque la fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la formule de Taylor-Mac Laurin fournit un réel θ dans $]0,1[$ tel que

$$e^t = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta t}.$$

Par suite,

$$\left| e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right| = \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta t} \leq \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|t|}.$$

Maintenant, d'après les théorèmes de croissances comparées, pour tout réel t, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ et on a donc montré que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ e^t = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right).}$$

C.2. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après B.4., on a

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 3.2^k - 2 & -6.2^k + 6 \\ 2^k - 1 & -2.2^k + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix},$$

où

$$a_n(t) = 3\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}, \quad b_n(t) = -6\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + 6\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!},$$
$$c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}, \quad d_n(t) = -2\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}.$$

C.3. D'après C.1.,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ E(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & -6e^{2t} + 6e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix}.}$$

C.4. Pour tout réel t, on a alors $E(t) = e^{2t}Q + e^tR$ où

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

C.5.

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = Q,$$

puis

$$R^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = R,$$

puis,

$$QR = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

et enfin

$$RQ = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

q et r sont donc des projections. De plus, $Q + R = I_2$ ou encore $r = Id - q$. q et r sont des projecteurs associés. Enfin, Ker$q$ est la droite d'équation $x - 2y = 0$ et donc Ker$q = G$ puis Im$q = \text{Vect}(3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) = F$ (lisible directement sur les colonnes de Q). Finalement,

$$\boxed{q \text{ est la projection sur } F \text{ parallèlement à } G \text{ et } r \text{ est la projection sur } G \text{ parallèlement à } F.}$$

C.6. Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

$$E(s)E(t) = (e^{2s}Q + e^sR)(e^{2t}Q + e^tR) = e^{2(s+t)}Q^2 + e^{2s+t}QR + e^{s+2t}RQ + e^{s+t}R^2 = e^{2(s+t)}Q + e^{s+t}R = E(s+t).$$

Comme en A., on a alors pour tout naturel n et tout réel t, $(E(t))^n = E(nt)$. Ensuite, puisque $E(0) = I_2$, on a encore $E(t)E(-t) = E(-t)E(t) = I_2$ et par suite, $E(t)$ est inversible et $(E(t))^{-1} = E(-t)$.

L'application $t \mapsto E(t)$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathcal{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$. Déterminons son noyau.
Soit t un réel.

$$E(t) = I_2 \Rightarrow e^{2t} - e^t = 0 \Rightarrow e^t = 1 \Rightarrow t = 0.$$

Le noyau de ce morphisme est réduit à $\{0\}$ et ce morphisme est donc injectif.

