CONCOURS COMMUN 2003
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Mecredi 21 mai 2003 de 14h00 à 18h00

Instruction générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette correspondant à cette épreuve.

Aucun document n'est autorisé
L'emploi d'une calculatrice est interdit

Problème 1

Partie I

Notons $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^t}{1+t^2}$. Il est clair que f est définie $\mathbb{R}$ entier, et que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nous noterons C_f la courbe représentative de f.

1. – Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$?

2. – Qu'en déduisez-vous au sujet de C_f ?

3. – Complétez chacune des phrases suivantes au moyen de l'une des locutions « est équivalent à », « est négligeable devant », « est dominé par » :

$f(t)$ .... e^t lorsque t tend vers $+\infty$

$f(t)$ .... $\dfrac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$

$f(t)$ .... $\dfrac{e^t}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$

Lorsque plusieurs réponses sont acceptables, vous donnerez la plus précise. Bien entendu, vous justifierez votre choix.

4. – Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

5. – Explicitez $f'(t)$.

6. – Dressez le tableau des variations de f.

7. – Explicitez $f''(t)$.

8. – Montrez que l'équation $f''(t) = 0$ possède deux solutions réelles : l'une est évidente, l'autre sera notée α. Vous ne chercherez pas à calculer α.

9. – Prouvez l'encadrement $-\dfrac{1}{5} < \alpha < 0$.

10. – Explicitez le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0. Que pouvez-vous en déduire concernant $\mathcal{C}_f$?

11. – Tracez la courbe représentative de f. Vous préciserez son allure au voisinage du point d'abscisse 1.

Partie II

Au vu des expressions de $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$, nous nous proposons d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{Il existe un polynôme } P_n \text{ tel que } f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}}$$

Vous allez raisonner par récurrence sur n.

Remarque : vous pouvez confondre polynôme et fonction polynomiale.

12. – Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0,1,2\}$; vous dresserez simplement un tableau donnant l'expression de P_n pour ces valeurs de n.

13. – Fixons $n \in \mathbb{N}$, et supposons l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Établissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$; vous déterminerez l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n.

Il résulte donc des questions **12** et **13** que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

14. – Montrez que P_n a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.

15. – Précisez le degré et le coefficient dominant de P_n.

16. – Donnez une expression simple de $c_n = P_n(i)$, où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Partie III

Notons $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Ainsi, F est la primitive de f qui s'annule en 0.

17. – Quel est le sens de variation de F ?

18. – Montrez que $F(x)$ possède une limite ℓ finie lorsque x tend vers $-\infty$. Vous ne chercherez pas à expliciter cette limite.

19. – Prouvez l'encadrement $-1 \leqslant \ell \leqslant 0$.

20. – Donnez une équation de la tangente à la courbe représentative de F, au point d'abscisse 0.

21. – Explicitez le développement limité de F à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Nous nous proposons d'étudier le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Nous noterons $J(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{te^t}{(1+t^2)^2}\,dt$, $K(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^3}\,dt$ et $L(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^4}\,dt$.

22. – Prouvez l'existence d'une constante A telle que $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$ pour tout réel x.

23. – Pour $x \geqslant 1$, placez les uns par rapport aux autres les réels 0, $J(x)$ et $K(x)$.

24. – Avec une intégration par parties soigneusement justifiée, montrez que $K(x) - 3L(x)$ est négligeable devant $\dfrac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

25. – En découpant l'intervalle $[1, x]$ sous la forme $[1, x^{3/4}] \cup [x^{3/4}, x]$, montrez que $L(x)$ est négligeable devant $\dfrac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

26. – En déduire un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

27. – Exploitez les résultats des questions **17**, **19**, **20** et **26** pour donner l'allure de la courbe représentative de F.

Problème 2

Partie I

Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\mathbf{D} : f \in \mathrm{E} \mapsto f'$. Il est clair que $\mathbf{D}$ est un endomorphisme de E.

1. – Déterminez le noyau et l'image de $\mathbf{D}$.

Soient $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$, $f_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \sin\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \cos\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)$. Nous noterons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et G le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.

Nous allons montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre de vecteurs de E. Soient a, b et c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ soit la fonction nulle.

2. – L'étudiante Antoinette observe que $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ pour tout réel t. Elle choisit (adroitement) trois valeurs de t, obtient un système de trois équations aux trois inconnues a, b et c, qu'elle résout ; il ne lui reste plus qu'à conclure. Faites comme elle !

3. – L'étudiante Lucie propose d'exploiter le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0. Faites comme elle !

4. – L'étudiante Nicole décide de s'intéresser au comportement de $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Faites comme elle !

La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de G, et ce sous-espace est de dimension 3.

5. – Montrez que G est stable par $\mathbf{D}$.

Nous noterons $\widehat{\mathbf{D}}$ l'endomorphisme de G induit par $\mathbf{D}$.

6. – Déterminez la matrice M de $\widehat{\mathbf{D}}$ dans la base $\mathcal{B}$.

7. – Calculez M^3.

8. – Montrez que M est inversible, et explicitez son inverse M^{-1}.

9. – Montrez que $\widehat{\mathbf{D}}$ est un automorphisme de G.

10. – Exprimez $(\widehat{\mathbf{D}})^{-1}$ en fonction de $\widehat{\mathbf{D}}$.

Partie II

Soient g et h deux éléments de G. Définissons $\varphi(g,h) = g(0)h(0) + g'(0)h'(0) + g''(0)h''(0)$.

11. – Dressez un tableau à trois lignes et quatre colonnes ; pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, la ligne i présentera les valeurs de i, $f_i(0)$, $f_i'(0)$ et $f_i''(0)$ dans cet ordre. Vous ne ferez pas apparaître le détail des calculs sur votre copie.

12. – Montrez que φ est un produit scalaire sur G.

13. – La base $\mathcal{B}$ est-elle orthogonale ?

14. – La base $\mathcal{B}$ est-elle orthonormée ?

Partie III

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle $y''' = y$, que nous noterons $(\mathcal{E})$. Une solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{E})$ est une fonction f définie et trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f'''(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

15. – Montrez que toute solution f de $(\mathcal{E})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

16. – Montrez que la fonction nulle est la seule solution polynomiale de $(\mathcal{E})$.

Notons $\mathbf{T} = \mathbf{D}^3 - \mathbf{Id}$, où $\mathbf{Id}$ est l'identité de E, et $\mathbf{D}^3 = \mathbf{D} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{D}$. Le noyau de $\mathbf{T}$ est donc l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

17. – Montrez que G est contenu dans le noyau de $\mathbf{T}$.

Nous allons établir l'inclusion inverse ; ainsi, G sera exactement l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$. Soit f une solution de $(\mathcal{E})$; nous noterons $g = f'' + f' + f$.

18. – Montrez que g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.

19. – Décrivez rapidement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

20. – Résolvez l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$; vous donnerez une base de l'ensemble des solutions.

21. – Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$.

22. – Et maintenant, concluez !

FIN