MINES d'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES 2010

CORRIGE

PREMIER PROBLEME :

PARTIE I :

1) L'ensemble de définition D de f est $]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

2) On a au voisinage de 0 : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. On en déduit : $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. De ce fait on a $D' =]-1,+\infty[$.

3) Le développement limité précédent prouve que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
Il est clair que f est de classe C^1 sur D en tant que quotient de deux fonctions de classe C^1 avec le dénominateur non nul sur D.

De plus $\forall x \in D\;\; f'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{x - (1+x)(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2(1+x)} = \dfrac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2(1+x)} \to -\frac{1}{2}$ donc on a : $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$ donc f' est continue en 0 ce qui assure la classe C^1 de f sur D'.

4) $\forall x \in D,\; f'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$ qui est du signe de $k(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$. On a alors $k'(x) = -\ln(1+x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$ d'où :

x	-1		0		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	$\|$	$-$	
$k(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

donc $\forall x \in]-1,+\infty[\; k(x) \leqslant 0$ donc f est décroissante

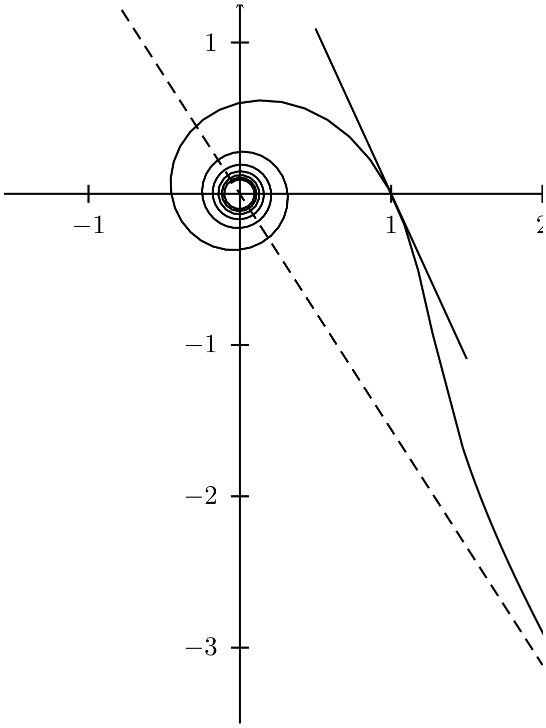
x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$\|\| +\infty$	$\searrow$	0

5) a) D'après les résultats obtenus à la question précédente, lorsque θ tend vers $+\infty$, ρ tend vers 0 donc la courbe présente une branche spirale, avec le point O comme point asymptote.

De plus on a $\dfrac{\rho(0)}{\rho'(0)} = -2$ donc au point de paramètre $\theta = 0$ la courbe présente une tangente correspondant à $tanV = -2$ dans le repère local.

b) $Y(\theta) = \rho(\theta) sin(\theta+1)$; on pose $u = \theta + 1 \to 0$ d'où : $Y = \dfrac{\ln u}{u-1} sinu \sim -u\ln(u) \to 0$. La courbe admet donc une asymptote d'équation Y=0 dans le repère polaire correspondant à $\theta = -1$.

c)



PARTIE II :

6) L'intégrale précédente est bien définie car la fonction f est continue sur [0,1].

7) La somme proposée est géométrique de raison -t, et puisque $t \in [0,1]$, la raison n'est pas égale à 1, donc la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique assure le résultat.

8) On intègre la relation précédente sur le segment [0,1] sur lequel elle est valide :

$$P_n(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\right) dt = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

9) $|R_n(x)| \leqslant \int_0^x \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right| dt$ d'après l'inégalité de la moyenne, puisque $x \geqslant 0$.

donc $|R_n(x)| \leqslant \int_0^x t^n dt$ car $\forall t \in [0,x] \quad 1+t \geqslant 1$.

donc $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

10) Il est clair que le polynôme Q_n est dérivable, et que $P_n(x)$ est égal à $xQ_n'(x)$

11) L'application $G : x \mapsto Q_n(x) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ est dérivable sur [0,1] et on a $G'(x) = g_n(x)$ d'après 10) et d'après 9)

$|g_n(x)| \leqslant \dfrac{x^n}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

d'où : $|Q_n(1) - Q_n(0) - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt| = |G(1) - G(0)| = |\int_0^1 g_n(x) dx| \leqslant \int_0^1 |g_n(x)| dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} dx \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$ d'où le résultat. On en déduit par majoration $\lim_{n \to \infty} Q_n(1) = L$.

12) Pour obtenir la précision voulue, il suffit d'après la question précédente d'avoir : $\dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant 10^{-4}$ soit $n+1 \geqslant 10^2$ c'est-à-dire $n \geqslant 99$.

PARTIE III :

13) f est indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions usuelles de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ puisque le dénominateur ne s'y annule pas.

14) On a déjà obtenu : $f'(x) = \dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$, donc :

$$f"(x) = -\frac{1+2x}{x^2(1+x)^2} - \frac{\frac{x^2}{1+x} - 2x\ln(1+x)}{x^4} = \frac{-2-3x}{x^2(1+x)^2} + \frac{2\ln(1+x)}{x^3}$$

15) Les calculs de la question 14 montrent que le résultat est vrai pour n=1 et n=2 en posant : $T_1(x) = 1$, $a_1 = -1$, $T_2(x) = -2-3x$ et $a_2 = 2$.

Supposons que le résultat soit vrai pour un entier n non nul et montrons-le au rang n+1 : On a $f^{(n)}(x) = \dfrac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$ donc en dérivant :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{T_n'(x)(1+x)^n x^n - T_n(x)(nx^{n-1}(1+x)^n + n(1+x)^{n-1}x^n)}{(1+x)^{2n}x^{2n}}$$

$$+a_n \frac{\frac{x^{n+1}}{1+x} - (n+1)x^n\ln(1+x)}{x^{2n+2}}$$

$$= \frac{T_n'(x)(1+x)x - T_n(x)(2nx+n) + a_n(1+x)^n}{(1+x)^{n+1}x^{n+1}} - \frac{a_n(n+1)\ln(1+x)}{x^{n+2}}$$

d'où le résultat en posant $T_{n+1} = T_n'(x)(1+x)x - T_n(x)(2nx+n) + a_n(1+x)^n$

et $a_{n+1} = -a_n(n+1)$.

16) On raisonne par récurrence :

Pour n=1 et n=2 les calculs de la question 16 prouvent que les coefficients sont entiers pour T_1 et T_2.

Supposons que pour un entier n non nul les coefficients de T_n soient tous entiers.

Les coefficients de T_n' sont alors entiers eux aussi et le lien qui relie T_{n+1} à T_n et T_n' prouve alors que les coefficients de T_{n+1} sont entiers.

17) Utilisons la formule de Leibniz avec les fonctions $g(x) = \ln(1+x)$ et $h(x) = \frac{1}{x}$

On obtient : $f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$

Or on a : $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ puis $g^{(k)}(x) = (-1)^{(k-1)} \dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ et $h^{(k)} = (-1)^{(k)} \dfrac{k!}{(x)^{k+1}}$

donc $f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{(k-1)} \dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k} (-1)^{(n-k)} \dfrac{(n-k)!}{(x)^{n-k+1}} + \dfrac{(-1)^n n! \ln(1+x)}{x^{n+1}}$

donc $T_n(x) = (-1)^{(n-1)} n! \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(1+x)^{n-k}x^{k-1}}{k}$.

On vérifie ce résultat pour n=2 : la formule donne : $T_n(x) = -2(1+x) - x = -2-3x$ ce qui correspond bien à la valeur de T_2 obtenue.

SECOND PROBLEME :

PARTIE I :

1) On remarque que ${}^tA = A$ donc ${}^tA.A = A^2 = A.{}^tA$ donc A vérifie la relation (1)

De même on remarque ${}^tC = -C$ donc ${}^tC.C = -C^2 = C.{}^tC$ donc C vérifie la relation (1)

2) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

On en déduit que selon la parité de n on a $A^n = A$ ou $A^n = I$. Dans les deux cas ces matrices vérifient la relation (1)

3) Pour montrer que A est inversible il suffit de prouver que son déterminant est non nul :

$det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ ou encore puisque $A^2 = I$, A est inversible d'inverse lui-même.

4) Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base on a : $u(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{j}$ et $u(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}$

u est donc bien une symétrie car $u \circ u(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}$ et $u \circ u(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{j}$ donc $u \circ u = id_{\mathbb{R}^2}$.

ensemble des vecteurs invariants : $V\binom{x}{y}$ est invariant par u $\Leftrightarrow AV = V \Leftrightarrow \binom{x}{y} = \binom{y}{x} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow V = \binom{x}{x} \Leftrightarrow V \in \mathbb{R}\binom{1}{1}$

5) U vérifie la relation (1) car comme pour la matrice A elle est symétrique.

Montrons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U^n = 2^{n-1}U$ par récurrence :

Pour n=1 le résultat donne $U = 2^0.U$ donc est vrai

Supposons que pour un entier n on a $U^n = 2^{n-1}U$ et montrons la relation au rang n+1 : $U^{n+1} = U.U^n = 2^{n-1}.U^2$ par hypothèse de récurrence; Or $U^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$=2U. D'où $U^{n+1} = 2^{n-1}.2.U = 2^n.U$

Les puissances U^n, vérifient donc(1) puisque ce sont les mêmes que U à une constante multiplicative près.

6) $A + C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ donc $(A + C).{}^t(A + C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ et ${}^t(A + C).(A + C) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cela prouve que A+C ne commute pas avec sa transposée donc on a : $A \in E$, $C \in E$ et $A + C \notin E$. Cela contredit la stabilité de E par somme donc la structure d'espace vectoriel.

7) ${}^tMM = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + dc \\ ab + dc & b^2 + d^2 \end{bmatrix}$.

De même on obtient : $M{}^tM = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$.

Donc $M \in E \Leftrightarrow \begin{cases} ac + bd & = ab + dc \\ a^2 + b^2 & = a^2 + c^2 \\ b^2 + d^2 & = c^2 + d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ ac + cd & = ac + dc \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} b = -c \\ ac - cd & = -ac + dc \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ b=c ou bien $\begin{cases} b & = -c \\ d = & -a \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix}$ ou bien $M = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}$

8) Donc $M \in Vect(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$ ou bien $M \in Vect(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$

E est donc bien la réunion de deux espaces vectoriels

9) Calculons $U.C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Montrons qu'alors cette matrice n'est pas dans E_2 car ne commute pas avec sa transposée :

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

On n'a donc pas la propriété proposée puisque U et C en donnent un contre-exemple.

PARTIE II :

10) Par définition, la matrice S est : $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11) $S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$S.^tS = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et ${}^tS.S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc $S \in E_3$

De même : $S^2.{}^t(S^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et ${}^t(S^2).S^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc $S^2 \in E_3$

12) ${}^tR.R = (aI_3 + b^tS + c^t(S^2)).(aI_3 + bS + cS^2) = (a^2+b^2+c^2)I_3 + a.b(S + {}^tS) + a.c({}^t(S^2) + S^2) + b.c(S.{}^t(S^2) + S^2.{}^tS) = (a^2+b^2+c^2)I_3 + a.b(S + {}^tS) + a.c({}^t(S^2) + S^2) + b.c(S + {}^tS)$

et $R.{}^tR = (aI_3 + bS + cS^2).(aI_3 + b^tS + c^t(S^2)) = (a^2+b^2+c^2)I_3 + a.b(S + {}^tS) + a.c({}^t(S^2) + S^2) + b.c(S.{}^t(S^2) + S^2.{}^tS) = {}^tR.R$ donc $R \in E_3$

13) Notons $F = Vect(I_3, S, S^2) = \{aI_3 + bS + cS^2, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$. D'après la question 12, toute matrice de F commute avec sa transposée, donc $F \subset E_3$.

De plus : $aI_3 + bS + cS^2 = 0 \iff \begin{bmatrix} a & b & c \\ -c & a & b \\ -b & -c & a \end{bmatrix} = 0 \iff a = b = c = 0$ donc la famille (I_3, S, S^2) est libre et F est bien un espace vectoriel de dimension 3 inclus dans E_3

14) Soient (a,b,c) et (d,e,f) deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et soit $R = aI_3 + bS + cS^2$ et $T = dI_3 + eS + fS^2$.

$R.T = adI_3 + (ae+bd)S + (af+be+cd)S^2 + (bf+ce)S^3 + cfS^4 = adI_3 + (ae+bd)S + (af+be+cd)S^2 - (bf+ce)I_3 - cfS$ car on prouve aisément que $S^3 = -I_3$. Donc $R.T \in Vect(I_3, S, S^2) = F$ et F est bien stable par multiplication.

PARTIE III :

15) Calculons : ${}^tB.B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & a-1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$B.{}^tB = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+a^2 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ d'où $B \in E_4 \iff a = -1$

16. On effectue des opérations sur les colonnes de B, ce qui laisse stable son rang :

$rg(B) = rg \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = rg \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = rg \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ d'où $rg(B) = 3$

Les deuxième et troisième colonnes de B étant opposées, le vecteur $\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ est dans ker(u) donc forme une base de ker(u) puisque d'après le théorème du rang, dim ker(u)=1

les trois vecteurs colonnes non nuls de la matrice obtenue ci-dessus forment alors une base de Im(u), soit : $(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}, -\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + 2\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_4})$

17. On utilise une notation matricielle pour ce calcul : $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

On remarque alors que $u(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}) = -2(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4})$.

18. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

On constate que les images sont égales aux doubles des vecteurs

19) Le premier vecteur est dans ker(u), pour les autres, leurs images sont des multiples d'eux-mêmes donc on obtient :

$Mat_C(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Notons-là Δ.

La formule de changement de base pour un endomorphisme nous donne alors la relation $B = P\Delta P^{-1}$ avec

$P = Pass(B, C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

20) Par récurrence sur n :

* le résultat pour n=1 résulte de la question 19)

* supposons-le pour un entier $n \geqslant 1$

* $B^{n+1} = B.B^n = P\Delta P^{-1}.P\Delta^n P^{-1} = P\Delta.\Delta^n P^{-1} = P\Delta^{n+1}P^{-1}$ d'où le résultat à l'ordre n+1.

Δ étant diagonale, on calcule aisément ses puissances; Pour n=2p, on constate alors :

$\Delta^{2p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p} \end{bmatrix} = 2^{2p-2}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 2^{2p-2}.\Delta^2.$

Donc $B^{2p} = P(2^{2p-2}.\Delta^2)P^{-1} = 2^{2p-2}P\Delta^2P^{-1} = 2^{2p-2}B^2$

On a alors $\Delta^{2p+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2p+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p+1} \end{bmatrix} = 2^{2p}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2^{2p}\Delta$

d'où on obtient de même $B^{2p+1} = 2^{2p}B$.