CONCOURS COMMUN SUP 2004
<u>DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES</u>

<u>Épreuve Spécifique de Mathématiques</u>
(Filière MPSI)

Proposition de Correction

Premier problème.

Partie I

1. L'équation linéaire du premier ordre s'écrit : $z' = -z \operatorname{th} t$; or une primitive de $-\operatorname{th} t$ est $-\ln(\operatorname{ch} t)$; donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} / z(t) = \lambda e^{-\ln(\operatorname{ch} t)}$ ou $z(t) = \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch} t}$.

$z(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$, d'où $z_1(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$.

2. L'équation sans second membre a déjà été résolue au *1.*

La recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante donne, en posant $z = \dfrac{\lambda(t)}{\operatorname{ch} t}$, $\dfrac{\lambda'(t)}{\operatorname{ch} t} = t \operatorname{th} t$, soit $\lambda'(t) = t \operatorname{sh} t$; une intégration par parties donne :

$\int t \operatorname{th} t dt = t \operatorname{ch} t - \int \operatorname{ch} t dt = t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t$; une solution particulière est donc

$z = \dfrac{t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = t - \operatorname{th} t$; d'où la solution générale : $z = \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch} t} + t - \operatorname{th} t \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

$z_2(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$, d'où $z_2(t) = t - \operatorname{th} t$.

Partie II

3. L'arc est défini sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

De $\forall t \in \mathbb{R} \quad x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, on déduit que **l'axe des ordonnées est axe de symétrie de** (Γ) ; on fera donc l'étude pour $x \geqslant 0$.

4. Lorsque $t \to +\infty \quad \operatorname{th} t \to 1$; donc $x(t) \to +\infty$; $\quad \operatorname{ch} t \to +\infty$, donc $y(t) \to 0$, ce qui montre que **l'axe des abscisses est asymptote à** (Γ).

5. $\begin{cases} x'(t) = 1 - \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t} = \dfrac{\operatorname{ch}^2 t - 1}{\operatorname{ch}^2 t} = \dfrac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} \\ y'(t) = -\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} \end{cases}$

t	0		$+\infty$
x'	0	+	
x	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	1	$\searrow$	0
y'	0	−	

6. $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(0)=\vec{0}$. Le point $A(0,1)$, obtenu pour $t=0$, est donc un point stationnaire. De $\dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}\begin{pmatrix} x''=2(\operatorname{ch}t)^{-3}\operatorname{sh}t \\ y''=\dfrac{-\operatorname{ch}^2t+2\operatorname{sh}^2t}{\operatorname{ch}^3t}\end{pmatrix}$, on déduit $\dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}(0)\begin{vmatrix}0\\-1\end{vmatrix}$; par suite, la tangente en A est verticale ; c'est donc l'axe des ordonnées. Compte tenu de la symétrie de la courbe pour cet axe et des signes de $x(t)$ et $y(t)$, le point **A est un point de rebroussement de première espèce**.

7.

a) De $\operatorname{ch}^2t-\operatorname{sh}^2t=1$, on déduit $\operatorname{ch}^2t=1+\operatorname{sh}^2t=2$, d'où ($\operatorname{ch}t>0$) $\operatorname{ch}t=\sqrt{2}$,

$\operatorname{th}t=\dfrac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}t}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\operatorname{th}t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $e^t=\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t=1+\sqrt{2}$, d'où $t=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

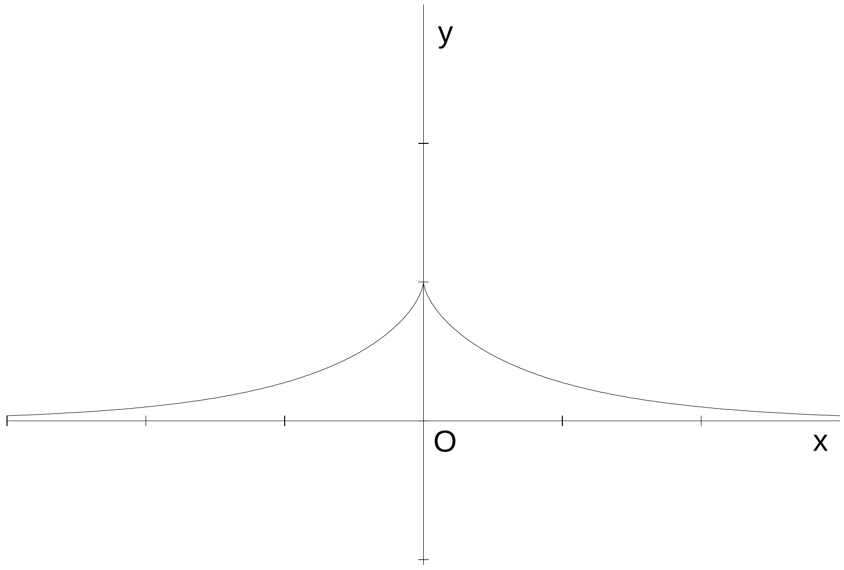
b) Le coefficient directeur de la tangente en $M(t)$, $(M\neq A)$, est

$m(t)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{-\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}^2t}\cdot\dfrac{\operatorname{ch}^2t}{\operatorname{sh}^2t}=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}t}\cdot$ Ainsi $m(t)=-1\Leftrightarrow\operatorname{sh}t=1$, soit $t=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$;

d'où $B\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La tangente en B a pour équation : $y-y_B=m(t)\left(x-x_B\right)$, soit $\boxed{y=-x+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$.

8.



9.

a) De $\dfrac{\overrightarrow{d(OM)}}{dt}(t)=\dfrac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}^2t}\begin{pmatrix}\operatorname{sh}t\\-1\end{pmatrix}$, on déduit qu'un vecteur directeur de la tangente en $M(t)$ est $\vec{u}(t)\begin{vmatrix}\operatorname{sh}t\\-1\end{vmatrix}$ (même pour $t=0$). Notons Δ_t la tangente en $M(t)$ à (Γ).

$N(x,y) \in \Delta_t \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MN}, \vec{u}(t)\right)$ est liée $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{MN}, \vec{u}(t)\right) = 0$, soit $\begin{vmatrix} x - t + t\,\mathrm{h}\,t & \mathrm{sh}\,t \\ y - \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,t} & -1 \end{vmatrix} = 0$,

soit $\boxed{x + y\,\mathrm{sh}\,t = t}$.

b) Pour $y = 0$, il vient $N\begin{vmatrix} t \\ 0 \end{vmatrix}$. De $\overrightarrow{NM}\begin{vmatrix} -\mathrm{th}\,t \\ \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,t} \end{vmatrix}$, on déduit

$$\left\|\overrightarrow{NM}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}\,t}\right)^2 + \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,t}} = \sqrt{\frac{\mathrm{sh}^2\,t + 1}{\mathrm{ch}^2\,t}} = 1 \qquad \left\|\overrightarrow{NM}\right\| = 1.$$

Partie III

10. Notons que $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^k\,t}$ étant continue sur $[0,x]$, $I_k(x)$ existe pour tout réel x.

Le changement de variable $u = e^t$ donne $\dfrac{du}{dt} = e^t$ et

$$I_1(x) = \int_0^x \frac{2dt}{e^t + e^{-t}} = 2\int_1^{e^x} \frac{du}{u + \frac{1}{u}}\frac{du}{u} = 2\int_1^{e^x} \frac{du}{u^2+1} = \left[2\,\mathrm{Arctan}\,x\right]_1^{e^x}.$$

D'où $\boxed{I_1(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\left(e^x\right) - \dfrac{\pi}{2}}$.

11. $I_2(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^2\,t} = \left[\mathrm{th}\,t\right]_0^x = \mathrm{th}\,x \qquad \boxed{I_2(x) = \mathrm{th}\,x}$.

12.

a) Intégrons par parties $I_k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^k\,t} = \int_0^x \frac{\mathrm{ch}\,t\,dt}{\mathrm{ch}^{k+1}\,t}$, en posant $u = (\mathrm{ch}\,t)^{-(k+1)}$, $v' = \mathrm{ch}\,t$,

donc $u' = -(k+1)(\mathrm{ch}\,t)^{-k-2}\cdot \mathrm{sh}\,t$, $v = \mathrm{sh}\,t$, en remarquant que u et v sont de classe C^1 sur $[0,x]$.

Il vient :

$$I_k(x) = \left[\frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}^{k+1}\,t}\right]_0^x + (k+1)\int_0^x \frac{\mathrm{sh}^2\,t}{\mathrm{ch}^{k+2}\,t}dt = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^{k+1}\,x} + (k+1)\int_0^x \frac{\mathrm{ch}^2\,t - 1}{\mathrm{ch}^{k+2}\,t}dt$$

$$= \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^{k+1}\,x} + (k+1)\left[\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^k\,x} - \int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^{k+2}\,x}\right] = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^{k+1}\,x} + (k+1)\left[I_k(x) - I_{k+2}(x)\right]$$

D'où $kI_k(x) = -\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^{k+1}\,x} + (k+1)I_{k+2}(x)$ ou $\boxed{(k+1)I_{k+2}(x) = kI_k(x) + \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^{k+1}\,x}}$.

b) Pour $k = 1$, il vient : $2I_3 = I_1 + \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^2\,x}$, soit $\boxed{I_3(x) = \mathrm{Arctan}\left(e^x\right) - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{2\,\mathrm{ch}^2\,x}}$.

Pour $k = 2$, on obtient : $3I_4 = 2I_2 + \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^3\,x}$ $\boxed{I_4(x) = \dfrac{2}{3}\mathrm{th}\,x + \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{3\,\mathrm{ch}^3\,x}}$

13.

a) On a $I_k(-x)=\int_0^{-x}\frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}\cdot$ Le changement de variable défini par $u=-t,\ du=-dt$ donne

$I_k(-x)=\int_0^{x}\frac{-du}{\operatorname{ch}^k(-u)}=-\int_0^{x}\frac{du}{\operatorname{ch}^k(u)}=-I_k(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$, ce qui montre que I_k **est une fonction impaire**.

b) Comme $t\mapsto\frac{1}{\operatorname{ch}^k t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, I_k est dérivable, donc **continue** sur $\mathbb{R}$ (intégrale fonction de la borne du dessus), de dérivée $I_k'(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}^k x}\cdot$

c) Cette dérivée est de classe C^∞ comme inverse d'une fonction de classe C^∞ qui ne s'annule pas ; par suite, I_k **est de classe** C^∞ **sur** $\mathbb{R}$.

14. On a : $\boxed{I_k'(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}^k x}}$, $I_k''(x)=-k\operatorname{ch}^{-k-1}x\cdot\operatorname{sh}x$, soit $\boxed{I_k''(x)=\frac{-k\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^{k+1}x}}$ et

$I_k'''(x)=k(k+1)\operatorname{ch}^{-k-2}x\cdot\operatorname{sh}^2x-k\operatorname{ch}^{-k-1}x\operatorname{ch}x$, d'où $\boxed{I_k'''(x)=\frac{k(k+1)\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^{k+2}x}-\frac{k}{\operatorname{ch}^k x}}$.

15. Comme I_k est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0, donné par la formule de Taylor-Young :

$I_k(x)=I_k(0)+\frac{x}{1!}I_k'(0)+\frac{x^2}{2!}I_k''(0)+\frac{x^3}{3!}I_k'''(0)+o(x^3)$, soit, puisque

$I_k(0)=0, I_k'(0)=1, I_k''(0)=0, I_k'''(0)=-k$, $\boxed{I_k(x)=x-k\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$

16. De $I_k'(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}>0$, on déduit que I_k **est une fonction strictement croissante**.

17.

a) De cette croissance stricte, il résulte que : $n<n+1\Rightarrow I_n(n)<I_k(n+1)$, soit $\forall n\quad u_n<u_{n+1}$; $(u_n)_{n\geqslant 1}$ **est donc strictement croissante**.

b) Comme $e^{-t}>0$, on a $\frac{1}{\operatorname{ch}t}=\frac{2}{e^t+e^{-t}}\leqslant\frac{2}{e^t+0}$, soit $\frac{1}{\operatorname{ch}t}\leqslant 2e^{-t}$.

Comme $n>0$, $u_n=\int_0^n\frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}\leqslant\int_0^n\left(2e^{-t}\right)^k dt$, d'où $u_n\leqslant 2^k\int_0^n e^{-kt}dt$, $u_n\leqslant 2^k\left[-\frac{e^{-kt}}{k}\right]_0^n$;

finalement : $u_n\leqslant\frac{2^k}{k}\left[1-e^{-nk}\right]<\frac{2^k}{k}\cdot$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, croissante et majorée, est donc convergente.

18.

a) Le même raisonnement (remplacer n par x), prouve que pour $x>0$,

$I_k(x)\leqslant\int_0^x\left(2e^{-t}\right)^k dt$, d'où $\forall x>0\quad I_k(x)\leqslant\frac{2^k}{k}\cdot$

La fonction I_k **, croissante et majorée, a donc une limite finie lorsque** $x\to+\infty$ (théorème de la limite monotone), d'où l'existence de $J_k\quad\forall k\in\mathbb{N}^*$.

b) $I_1(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\left(e^x\right) - \dfrac{\pi}{2} \to 2\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\ (x \to +\infty)$; ainsi $\boxed{J_1 = \dfrac{\pi}{2}}$

$I_2(x) = \mathrm{th}\,x \to 1\ (x \to +\infty)$; ainsi $\boxed{J_2 = 1}$.

c) On a : $I_{k+2}(x) = \dfrac{k}{k+1} I_k(x) + \dfrac{1}{k+1}\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^{k+1} x}$.

Or, lorsque $x \to +\infty$, $I_k(x) \to J_k$, $\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^{k+1} x} \sim \dfrac{\frac{e^x}{2}}{\left(\frac{e^x}{2}\right)^{k+1}}$; donc $\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^{k+1} x} \sim \left(\dfrac{e^x}{2}\right)^{-k} \to 0$.

On déduit, en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, $\boxed{J_{k+2} = \dfrac{k}{k+1} J_k}$.

On en déduit, en donnant à k les valeurs 2,4,6,… que $J_4 = \dfrac{2}{3} J_2 = \dfrac{2}{3}$, $J_6 = \dfrac{4}{5} J_4 = \dfrac{2\times 4}{3\times 5}$.

On conjecture donc que, pour ***k* pair** $(k = 2p)$, $p \geqslant 2$, $J_{2p} = \dfrac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p-2)}{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2p-1)}$.

Cette relation est vraie pour $p = 2$. Supposons la vérifiée pour $p \geqslant 2$; alors, pour $k = 2p$, il vient $J_{2p+2} = \dfrac{2p}{2p+1} J_{2p} = \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2p-2)(2p)}{2\times 4\times\cdots\times(2p-1)(2p+1)}$.

Ainsi, $\boxed{\forall p \geqslant 2 \quad J_{2p} = \dfrac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p-2)}{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2p-1)}}$.

Remarquons

que : $J_{2p} = \dfrac{\left[2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p-2)\right]^2}{1\times 2\times 3\times 4\times\cdots\times(2p-2)(2p-1)} = \dfrac{\left[2^{p-1}\left(1\times 2\times 3\times\cdots\times(p-1)\right)\right]^2}{(2p-1)!}$.

Donc $\boxed{J_{2p} = \dfrac{2^{2p-2}\left[(p-1)!\right]^2}{(2p-1)!} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*}$ (encore vrai pour $p = 1$).

De même, **si k est impair** ($k = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$), $J_3 = \dfrac{1}{2} J_1$, $J_5 = \dfrac{3}{4} J_3 = \dfrac{1\times 3}{2\times 4} J_1$; on prouve de même par récurrence sur p que :

$$\boxed{J_{2p+1} = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)} J_1 = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)}\cdot\frac{\pi}{2}}$$

Remarquons que : $J_{2p+1} = \dfrac{1\times 2\times 3\times 4\times\cdots\times(2p-1)(2p)}{\left[2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)\right]^2}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\left[(2p)!\right]}{\left(2^p p!\right)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

D'où $\boxed{J_{2p+1} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2} \ \forall p \in \mathbb{N}}$ (encore vrai pour $p = 0$).

Deuxième problème

Partie I

1.

a) E est inclus dans l'ensemble $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 qui est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Posons $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = aM_1 + bM_2 + cM_3$, ce qui montre que **E est le sous espace vectoriel** de $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathsf{B} = (M_1, M_2, M_3)$.

b) De plus, si $aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0$, alors $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $a = b = c = 0$; ce qui montre que B est libre.

On en déduit que ***E* est un espace vectoriel de dimension 3, de base B**.

2.

a) $\forall (M, M') \in E^2 \quad M \cdot M' = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ac' + cb' \\ 0 & bb' \end{pmatrix} \in E$

b) E est inclus dans l'anneau $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 et $\forall (M, M') \in E^2 \quad M - M' \in E$ (car E est un espace vectoriel), $MM' \in E$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$; il en résulte que E est un sous-anneau de $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$: ***E* est un anneau**.

c) Remarquons que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui montre que **l'anneau *E* n'est pas commutatif**.

3. Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ de G, on a $\det(M) = ab \neq 0$ (car $a \neq 0$ et $b \neq 0$), ce qui montre que M est inversible.

G est donc une partie non vide du groupe $GL_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 inversibles.

De plus, $\forall (M, M') \in E^2 \quad M \cdot M' = \begin{pmatrix} aa' & ac' + cb' \\ 0 & bb' \end{pmatrix}$, avec $aa' > 0$ et $bb' > 0$, car

$a > 0, a' > 0, b > 0, b' > 0$, ce qui prouve que $MM' \in G$.

En outre $MM' = I \Leftrightarrow \begin{cases} aa' = 1 \\ bb' = 1 \\ ac' + cb' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \dfrac{1}{a} \text{ car } a \neq 0 \\ b' = \dfrac{1}{b} \text{ car } b \neq 0 \\ c' = -\dfrac{cb'}{a} = -\dfrac{c}{ab} \end{cases}$

Donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & -\dfrac{c}{ab} \\ 0 & \dfrac{1}{b} \end{pmatrix} \in G \left(\text{car } \dfrac{1}{a} > 0 \text{ et } \dfrac{1}{b} > 0 \right)$.

Par suite, $(G, \cdot)$ **est un groupe** (sous-groupe de $\left(GL_2(\mathbb{R}), \cdot\right)$.

Partie II

4.

a) La relation donnée est vraie pour $p = 1$. Supposons-la vérifiée pour $p \geqslant 1$; alors :

$A^{p+1} = A^p A$ donne : $A^{p+1} = \begin{pmatrix} a^p & c\dfrac{a^p - b^p}{a-b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{p+1} & c\left[a^p + b\dfrac{a^p - b^p}{a-b} \right] \\ 0 & b^{p+1} \end{pmatrix}$.

Or $a^p + b\dfrac{a^p - b^p}{a-b} = \dfrac{a^{p+1} - b^{p+1}}{a-b}$, ce qui montre que le relation est vraie pour $p+1$.

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et $a \neq b$, $\boxed{A^p = \begin{pmatrix} a^p & c\dfrac{a^p - b^p}{a-b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix}}$

b) On obtient : $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ac \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2c \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$.

On conjecture donc que $A^p = \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1}c \\ 0 & a^p \end{pmatrix}$. Cette relation est vraie pour $p = 1$.

Supposons-la vérifiée pour $p \geqslant 1$; alors : $A^{p+1} = A^p A$ donne :

$A^{p+1} = \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1}c \\ 0 & a^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{p+1} & (p+1)a^p c \\ 0 & a^{p+1} \end{pmatrix}$.

Par suite, pour $a = b$, on a $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^* \quad A^p = \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1}c \\ 0 & a^p \end{pmatrix}}$

5.

a) Rappelons que : si f est une fonction de classe C^{n+1} sur le segment $[a,b]$, et si K est un majorant de $\left|f^{n+1}(t)\right|$ sur $[a,b]$, alors $\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}K$.

b) En appliquant cette inégalité à $f=\exp$ sur $[0,x]$, compte tenu de $f^{(k)}(x)=e^x$ et de $f^{(k)}(0)=1$, il vient $\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-0)^k}{k!}f^{(k)}(0)\right| \leqslant \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}K$, soit

$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}K$. Or, $\begin{cases}\text{si } x\geqslant 0 & \forall t\in[0,x] \quad \left|f^{(n+1)}(t)\right|\leqslant e^x \\ \text{si } x<0 & \forall t\in[x,0] \quad \left|f^{(n+1)}(t)\right|\leqslant 1\end{cases}$; donc $K=e^x$

ou $K=1$, constante indépendante de n (x est fixé) et $\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}K$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, il vient $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x)=e^x}$.

c) On a : $\alpha_n=1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}=\sum_{p=0}^{n}\frac{a^p}{p!}$, $\beta_n=1+\sum_{p=1}^{n}\frac{b^p}{p!}=\sum_{p=0}^{n}\frac{b^p}{p!}$ et

$\gamma_n=\frac{c}{a-b}\left(\frac{a-b}{1!}+\frac{a^2-b^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n-b^n}{n!}\right)=\frac{c}{a-b}\left(\sum_{p=0}^{n}\frac{a^p}{p!}-\sum_{p=0}^{n}\frac{b^p}{p!}\right)$.

D'où $\boxed{\alpha_n=\varphi_n(a),\ \beta_n=\varphi_n(b),\ \gamma_n=\frac{c}{a-b}\left(\varphi_n(a)-\varphi_n(b)\right)}$.

Comme, pour tout réel x, $e^x=\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x)$, on a :

$\boxed{\alpha=\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=e^a}$, $\boxed{\beta=\lim_{n\to+\infty}\beta_n=e^b}$ et $\boxed{\gamma=\lim_{n\to+\infty}\gamma_n=c\frac{e^a-e^b}{a-b}}$

d) Pour $a=b$, on a $\alpha_n=\beta_n=\varphi_n(a)$ et

$\gamma_n=c\left(\frac{1}{1!}+\frac{2a}{2!}+\frac{3a^2}{3!}\cdots+\frac{na^{n-1}}{n!}\right)=c\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\right)=c\varphi_{n-1}(a)$.

Par suite, lorsque $\boxed{n\to+\infty \quad \alpha_n\to e^a,\beta_n\to e^a}$ et $\boxed{\gamma_n\to ce^a}$.

6. L'application f de E vers E est donc définie par : $\begin{cases}\text{si } a\neq b & f\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^a & c\dfrac{e^a-e^b}{a-b}\\ 0 & e^b\end{pmatrix}\\ \text{si } a=b & f\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^a & ce^a\\ 0 & e^a\end{pmatrix}\end{cases}$

a) Remarquons que $f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\neq 0$, ce qui prouve que **$f$ n'est pas linéaire**.

b) Soit $A=\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix}$.

Si $f(A)=f(B)$, alors, dans tous les cas, on a : $e^a=e^{a'}, e^b=e^{b'}$, donc $a=a', b=b'$; par suite, si $a\neq b$, on a $a'\neq b'$.

1^er^ cas : si $a\neq b$ $(\text{et donc } a'\neq b')$, on obtient : $\begin{pmatrix} e^a & c\dfrac{e^a-e^b}{a-b} \\ 0 & e^b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{a'} & c'\dfrac{e^{a'}-e^{b'}}{a'-b'} \\ 0 & e^{b'} \end{pmatrix}$ et,

puisque $a=a', b=b'$, $c\dfrac{e^a-e^b}{a-b}=c'\dfrac{e^{a'}-e^{b'}}{a'-b'}$, donc $(e^a\neq e^b)$ $c=c'$; d'où $A=B$.

2^ème^ cas : si $a=b$ $(\text{et donc } a'=b')$, alors $\begin{pmatrix} e^a & ce^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{a'} & c'e^{a'} \\ 0 & e^{a'} \end{pmatrix}$.

De $a=a'$ et $ce^a=c'e^{a'}$, on déduit $c=c'$; ainsi $A=B$.

Dans tous les cas, la relation $f(A)=f(B)$ entraîne $A=B$; donc ***f* est injective**.

c) Comme l'élément diagonal e^a de $f(A)$ est strictement positif, des éléments de E n'ont pas d'antécédent par *f* : par exemple, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est élément de E et n'a pas d'antécédent par *f*, ce qui montre que ***f* n'est pas surjective**.

d) Il est immédiat, puisque $e^a>0$ et $e^b>0$, que $\forall A\in E \quad f(A)\in G$, donc $\operatorname{Im} f\subset G$.

Réciproquement, soit $B=\begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix}\in G$, avec $a'>0$ et $b'>0$.

Remarquons que si $f(A)=B$, alors $e^a=a', e^b=b'$.

Cas où $a'\neq b'$; alors $a\neq b$.

$$f(A)=B \Leftrightarrow \begin{cases} e^a=a' \\ e^b=b' \\ c\left(\dfrac{e^a-e^b}{a-b}\right)=c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\ln a' \\ b=\ln b' \\ c=c'\dfrac{\ln a'-\ln b'}{a'-b'} \end{cases}$$

Cas où $a'=b'$; alors $a=b$. $f(A)=B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^a & ce^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & a' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a=a' \\ ce^a=c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\ln a' \\ c=\dfrac{c'}{a'} \end{cases}$

Ainsi, $\forall B\in G \quad \exists A\in G / f(A)=B$, ce qui prouve que $G\subset \operatorname{Im} f$.

Finalement : $\boxed{\operatorname{Im} f=G.}$

7.

a) **Premier cas :** $a \neq b$.

On a : $f(A)-I=\begin{pmatrix} e^a-1 & c\dfrac{e^a-e^b}{a-b} \\ 0 & e^b-1 \end{pmatrix}$; posons, pour simplifier, $B-I=\begin{pmatrix} u & w \\ 0 & v \end{pmatrix}$. Puisque $a \neq b$, alors $u \neq v$. D'où : $(B-I)^p=\begin{pmatrix} u^p & w\dfrac{u^p-v^p}{u-v} \\ 0 & v^p \end{pmatrix}$ et

$a_n=u-\dfrac{u^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{u^n}{n}=\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\dfrac{u^p}{p}=\psi_n(u)$, $b_n=\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\dfrac{v^p}{p}=\psi_n(v)$ et

$c_n=\dfrac{w}{u-v}\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\dfrac{u^p-v^p}{p}$, soit

$$\boxed{\begin{cases} a_n=\psi_n(u)=\psi_n\left(e^a-1\right) \\ b_n=\psi_n(v)=\psi_n\left(e^b-1\right) \\ c_n=\dfrac{w}{u-v}\left[\psi_n(u)-\psi_n(v)\right]=c\left[\psi_n\left(e^a-1\right)-\psi_n\left(e^b-1\right)\right] \end{cases}}$$

Second cas : $a=b$.

$B-I=\begin{pmatrix} e^a-1 & ce^a \\ 0 & e^a-1 \end{pmatrix}$; d'où, en posant $B-I=\begin{pmatrix} u & w \\ 0 & u \end{pmatrix}$, $(B-I)^p=\begin{pmatrix} u^p & pu^{p-1}w \\ 0 & u^p \end{pmatrix}$.

Donc $a_n=b_n=\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\dfrac{u^p}{p}$, $c_n=w\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}u^{p-1}=w\sum_{p=0}^{n-1}(-u)^p$.

On reconnaît dans c_n la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-u$; comme cette raison est différente de 1 $(-u=1-e^a \Rightarrow -u \neq 1)$, on a :

$c_n=w\dfrac{1-(-1)^n u^n}{1+u}$. Ainsi : $\boxed{\begin{cases} a_n=b_n=\psi_n(u)=\psi_n\left(e^a-1\right) \\ c_n=ce^a\dfrac{1-(-1)^n u^n}{1+\left(e^a-1\right)}=c\left(1-(-1)^n\left(e^a-1\right)^n\right) \end{cases}}$

b) Posons $f(x)=\ln(1+x)$; cette fonction est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$ et vérifie les hypothèses de la formule de Taylor à tout ordre. On a $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$; une récurrence simple prouve que, $\forall k \geqslant 1$, $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$; $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$

Pour $t \in [0,x]$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right|=\dfrac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leqslant \dfrac{n!}{(1+0)^{n+1}}$ car $x \geqslant 0$; par suite

$\left|\ln(1+x)-\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(x-0)^k}{k!}(-1)^{k-1}(k-1)!\right| \leqslant \dfrac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}n!$, soit $\left|\ln(1+x)-\psi_n(x)\right| \leqslant \dfrac{x}{n+1}$, ce qui montre que $\lim_{n\to+\infty}\left(\ln(1+x)-\psi_n(x)\right)=0$ ou $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\psi_n(x)=\ln(1+x)}$.

c) Les relations $0 < a < \ln 2$ et $0 < b < \ln 2$ sont équivalentes à $1 < e^a < 2$, $1 < e^b < 2$; on en déduit $0 < e^a - 1 < 1$ et $0 < e^b - 1 < 1$; donc $0 < u < 1$ et $0 < v < 1$.

Dans les deux cas : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \psi_n(u) = \ln(1+u) = \ln\left(e^a\right) = a$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \psi_n(v) = \ln(1+v) = \ln\left(e^b\right) = b$.

Pour étudier $\lim c_n$, on distingue les deux cas :

Premier cas : $a \neq b$: $c_n = \dfrac{w}{u-v}\left[\psi_n(u) - \psi_n(v)\right] \to \dfrac{w}{u-v}(a-b)$; donc

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \left(\frac{c\dfrac{e^a - e^b}{a-b}}{\left(\left(e^a - 1\right) - \left(e^b - 1\right)\right)}\right)(a-b) = c\frac{e^a - e^b}{a-b}\,\frac{a-b}{e^a - e^b} = c.$$

Second cas : $c_n = \dfrac{w}{1+u}\left[1 - (-1)^n u^n\right] \to \dfrac{w}{1+u}$ car, comme $|u| < 1$, $u^n \to 0$; donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{ce^a}{e^a} = c$.

Ainsi, dans tous les cas : $\boxed{\lim a_n = a, \lim b_n = b \text{ et } \lim c_n = c}$.