CONCOURS COMMUN 2010
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Corrigé

PROBLÈME 1

1) Si $a=b$, $x=y$ et donc le support de $\Gamma_{a,b}$ est inclus dans la droite d'équation $y=x$.
Si t parcourt $\mathbb{R}_+$, x (et y) parcourent $]0,1]$; ainsi,

$\boxed{\text{si } a=b, \text{ le support de } \Gamma_{a,b} \text{ est la partie de la droite d'équation } y=x \text{ délimitée par } O=(0,0) \text{ (non compris) et } A=(1,1) \text{ (compris).}}$

2) Un point (x,y) est sur le support de $\Gamma_{a,b}$ si et seulement si (y,x) est sur le support de $\Gamma_{b,a}$:
$\boxed{\text{les supports de } \Gamma_{a,b} \text{ et de } \Gamma_{b,a} \text{ sont symétriques par rapport à la droite d'équation } y=x}$.

3) Si $t>0$, $f_a(t)=\dfrac{1}{1+\exp(a\ln(t))}$ donc f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et si $t>0$, $f_a'(t)=-\dfrac{at^{a-1}}{(1+t^a)^2}<0$:
$\boxed{f_a \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+}$. De plus, $\boxed{f_a(0)=1}$ et $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} f_a(t)=0}$;
on obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$f_a'(x)$	$-$	
$f_a(x)$	$1 \searrow$	0

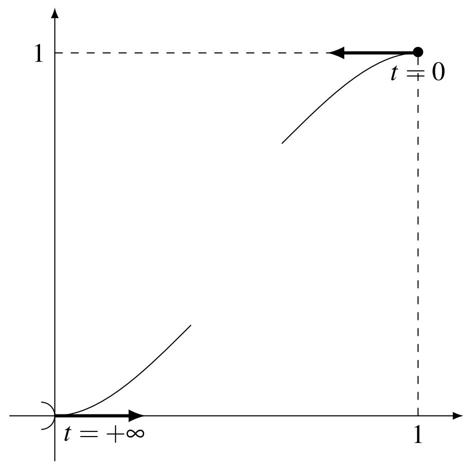
4) Si $t>0$, $f_a(\frac{1}{t})=\dfrac{t^a}{1+t^a}=\dfrac{t^a+1-1}{1+t^a}$: $\boxed{f_a(\frac{1}{t})+f_a(t)=1}$.

5) Ainsi, si $t>0$, $x(\frac{1}{t})=1-x(t)$ et $y(\frac{1}{t})=1-y(t)$:
$\boxed{\text{le support de } \Gamma_{a,b} \text{ privé de } (1,1) \text{ est symétrique par rapport au point } I=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$.

6) Voici le tableau de variations de x et y :

t	0	$+\infty$
$x(t)$	$1 \searrow$	0
$y(t)$	$1 \searrow$	0

7) On a $\dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}=t^{b-a}\dfrac{1+t^a}{1+t^b}$ qui a pour limite 0 lorsque t tend vers 0 ($b>a$) : il y a une demi-tangente horizontale au point de paramètre $t=0$.
Par utilisation du centre de symétrie : $\lim\limits_{0} F=(0,0)$ avec demi-tangente horizontale.
Voici l'allure locale en $t=0$ et $t=+\infty$:



8) On a $f_a(t) = \dfrac{1}{1+\exp(a\ln(t))}$.

Au voisinage de $t=1$, en posant $u = t-1$, $\ln(t) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + \mathrm{o}(u^3)$.

Au voisinage de $u=0$, $\exp(u) = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + \mathrm{o}(u^3)$.

On obtient : $1+\exp(a\ln(t)) = 1 + 1 + (a\ln(t)) + \dfrac{(a\ln(t))^2}{2} + \dfrac{(a\ln(t))^3}{6} + \mathrm{o}((\ln(t))^3) =$

$$2 + a\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3}\right) + \frac{a^2}{2}\left(u^2 - u^3\right) + \frac{a^3}{6}u^3 + \mathrm{o}(u^3) = 2 + au + \frac{a(a-1)}{2}u^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}u^3 + \mathrm{o}(u^3).$$

Alors : $f_a(t) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{a}{2}u + \dfrac{a(a-1)}{4}u^2 + \dfrac{a(a-1)(a-2)}{12}u^3 + \mathrm{o}(u^3)\right)^{-1} =$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{2}u - \frac{a(a-1)}{4}u^2 - \frac{a(a-1)(a-2)}{12}u^3 + \frac{a^2}{4}u^2 + \frac{a^2(a-1)}{4}u^3 - \frac{a^3}{8}u^3 + \mathrm{o}(u^3)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{2}u + \frac{a}{4}u^2 + \frac{a(a^2-4)}{24}u^3\right).$$

Finalement, $\boxed{f_a(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a}{4}(t-1) + \dfrac{a}{8}(t-1)^2 + \dfrac{a(a-2)(a+2)}{48}(t-1)^3 + \mathrm{o}((t-1)^3) \text{ au voisinage de } t=1}$.

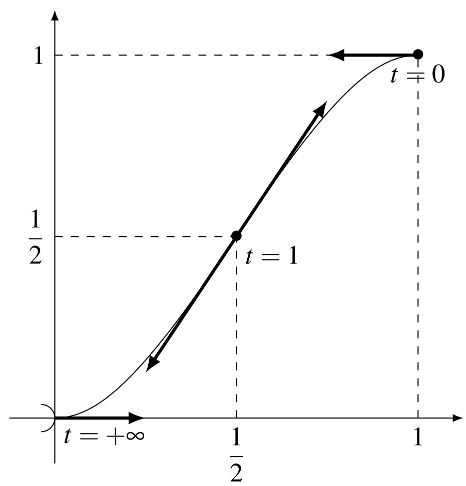
Autrement dit, $\boxed{\alpha = \dfrac{a}{8} \text{ et } \beta = \dfrac{a(a-2)(a+2)}{48}}$.

9) On a donc au voisinage de $t=1$, $F(t) = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}) - \dfrac{(t-1)}{4}(1,2) + \dfrac{(t-1)^2}{8}(1,2) + \dfrac{(t-1)^3}{48}\big(-3,0\big) + \mathrm{o}((t-1)^3)$;

il en résulte que le premier entier caractéristique est $p=1$ et que le deuxième entier caractéristique est $q=3$ ($\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$).

$\boxed{\text{le point } F(1) \text{ est un point d'inflexion ; la tangente en ce point est dirigée par } (1,2)}$.

10) Voici l'allure du support de $\Gamma_{1,2}$:



11) $\boxed{\varphi(0)=\int_0^1 \frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}}$ $\boxed{\varphi(1)=\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt=\Big[\ln(1+t)\Big]_0^1=\ln(2)}$ $\boxed{\varphi(2)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt=\Big[\arctan(t)\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}}$.

12) Si $0\le x<y$ et si $0\le t\le 1$, $0<1+t^y\le 1+t^x$ et donc $f_x(t)\le f_y(t)$ puis par intégration, $\varphi(x)\le\varphi(y)$: $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}$.

13) Si $0\le x\le y$, $\varphi(x)-\varphi(y)=\int_0^1\left(\frac{1}{1+t^x}-\frac{1}{1+t^y}\right)dt=\int_0^1 \frac{t^y-t^x}{(1+t^x)(1+t^y)}\,dt$.

Donc, $|\varphi(x)-\varphi(y)|\le\int_0^1\frac{|t^y-t^x|}{(1+t^x)(1+t^y)}\,dt\le\int_0^1|t^y-t^x|\,dt=\left[\frac{t^{x+1}}{x+1}-\frac{t^{y+1}}{y+1}\right]_0^1=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y+1}=\frac{y-x}{(x+1)(y+1)}$.

Comme $x+1\ge 1$ et $y+1\ge 1$, on obtient $\boxed{|\varphi(x)-\varphi(y)|\le\int_0^1(t^x-t^y)\,dt\le y-x}$.

14) En utilisant le théorème d'encadrement, on obtient $\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y\ge x}}|\varphi(x)-\varphi(y)|=0$: φ est continue à droite en x ;

et, $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x\le y}}|\varphi(x)-\varphi(y)|=0$: φ est continue à gauche en y ; ceci valant pour tous x et y positifs, $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$.

Remarque : on peut aussi montrer que pour tous x et y réels positifs :

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\le|x-y|$$

Donc φ est 1-lipschitzienne et donc continue sur $\mathbb{R}_+$.

15) Si $x\ge 0$, $1-\varphi(x)=-\int_0^1\frac{1}{1+t^x}\,dt+\int_0^1 dt$ soit $\boxed{1-\varphi(x)=\int_0^1\frac{t^x}{1+t^x}\,dt}$;

16) $0\le\int_0^1\frac{t^x}{1+t^x}\,dt\le\int_0^1 t^x\,dt=\left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1=\frac{1}{x+1}$.

Mais, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$ et par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^1\frac{t^x}{1+t^x}\,dt=0$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1}$.

17) On pose $u(t)=t$ et $v(t)=\frac{1}{1+t^x}$; u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et :

$\varphi(x)=\int_0^1 u'(t)v(t)\,dt=\Big[u(t)v(t)\Big]_0^1-\int_0^1 u(t)v'(t)\,dt=\left[\frac{t}{1+t^x}\right]_0^1-\int_0^1 t\cdot\frac{-xt^{x-1}}{(1+t^x)^2}\,dt$: $\boxed{\varphi(x)=\frac{1}{2}+x\int_0^1\frac{t^x}{(1+t^x)^2}\,dt}$.

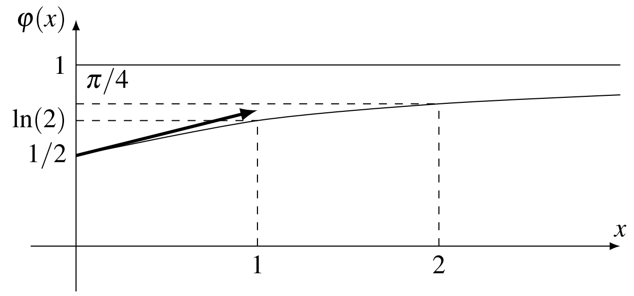
18) Comme $\varphi(0)=\frac{1}{2}$, on a donc $\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}-\frac{1}{4}\right|=\left|\int_0^1\frac{t^x}{(1+t^x)^2}\,dt-\frac{1}{4}\right|=\left|\int_0^1\left(\frac{t^x}{(1+t^x)^2}-\frac{1}{4}\right)dt\right|$.

On obtient $\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}-\frac{1}{4}\right|=\left|\int_0^1\frac{4t^x-(1+t^x)^2}{4(1+t^x)^2}\,dt\right|=\left|\int_0^1\frac{(1-t^x)^2}{4(1+t^x)^2}\,dt\right|=\int_0^1\frac{(1-t^x)^2}{4(1+t^x)^2}\,dt\le\int_0^1\frac{(1-t^x)^2}{4}\,dt$.

Mais, $\int_0^1\frac{(1-t^x)^2}{4}\,dt=\frac{1}{4}\left[\frac{t^{2x+1}}{2x+1}-2\frac{t^{x+1}}{x+1}+1\right]_0^1=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{2}{x+1}+1\right)=\frac{x^2}{2(x+1)(2x+1)}$ a pour limite 0 en 0.

Donc, $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}-\frac{1}{4}\right|=0$: $\boxed{\text{la pente de la demi-tangente en } (0,\tfrac{1}{2}) \text{ est } \tfrac{1}{4}}$.

19) Voici l'allure de la courbe représentant φ sur $\mathbb{R}_+$:



20) On a vu que $1-\varphi(x)=\int_0^1\frac{t^x}{1+t^x}\,dt$. On opère une intégration par parties sous la forme suivante :

on pose, pour $x>0$, $u(t)=\frac{1}{x}\cdot\ln(1+t^x)$ si bien que $u'(t)=\frac{t^{x-1}}{1+t^x}$ et $v(t)=t$; on a u et v de classe C^1 sur $[0,1]$ et :

$$1-\varphi(x)=\int_0^1 u'(t)v(t)\,dt=\left[\frac{1}{x}\cdot t\ln(1+t^x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{x}\cdot\ln(1+t^x)\,dt=\frac{\ln(2)}{x}-\frac{1}{x}\int_0^1\ln(1+t^x)\,dt.$$

Mais, si $u\geq 0$, $0\leq\ln(1+u)\leq u$ par inégalité des accroissements finis ; on obtient $0\leq\displaystyle\int_0^1\ln(1+t^x)\,dt\leq\int_0^1 t^x\,dt=\frac{1}{x+1}$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^1\ln(1+t^x)\,dt=0$ et $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^1\ln(1+t^x)\,dt=\mathrm{o}(\frac{1}{x})$ au voisinage de $+\infty$.

Il en résulte que $\boxed{\varphi(x)-1\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{-\ln(2)}{x}}$.

PROBLÈME 2

21) On a $k\dbinom{p}{k}=k\cdot\dfrac{p!}{k!(p-k)!}=\dfrac{p!}{(k-1)!(p-k)!}=p\cdot\dfrac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!}$; donc $\boxed{k\dbinom{p}{k}=p\dbinom{p-1}{k-1}}$.

Comme les combinaisons sont des entiers, la question précédente montre que p divise $k\dbinom{p}{k}$; mais $p\in\mathscr{P}$ donc p est premier avec k ($1\leq k\leq p-1$). D'après le théorème de Gauss, $\boxed{p\mid\dbinom{p}{k}}$.

22) On opère par récurrence sur a :

- $0^p-0=0$ et donc $p\mid(0^p-0)$.
- Soit $a\in\mathbb{N}$; supposons que $p\mid(a^p-a)$.

  Alors, $(a+1)^p-(a+1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^k-a-1=\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k+a^p-a$.

  Or, $p\mid\dbinom{p}{k}$ pour $1\leq k\leq p-1$ et $k\mid(a^p-a)$ par hypothèse de récurrence. Donc, $a\mid\big((a+1)^p-(a+1)\big)$.

Ainsi, par récurrence, $\boxed{\forall a\in\mathbb{N},\ p\mid(a^p-a)}$.

23) Si M à coefficients entiers vérifie $\forall p\in\mathscr{P}$, $p\mid\det(M^p)$, comme $\det(M^p)=\det(M)^p$, $p\mid\det(M)^p$.
Mais, d'après la question précédente, $p\mid(\det(M)^p-\det(M))$.
Donc, $\forall p\in\mathscr{P}$, $p\mid\det(M)$: l'entier $\det(M)$ divisible par tout nombre premier est nul et M n'est pas inversible.

Réciproquement, si M n'est pas inversible, $\det(M)=0=\det(M^p)$ pour tout p de $\mathscr{P}$; donc $p\mid\det(M^p)$. Ainsi,

$\boxed{\text{les matrices } M \text{ de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \text{ à coefficients entiers qui vérifient } \forall p\in\mathscr{P},\ p\mid\det(M^p) \text{ sont exactement les matrices non inversibles à coefficients entiers.}}$

24) On constate que $\mathscr{A}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices :

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ ($\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&-c&b\end{pmatrix}=aA+bB+cC$).

Donc, $\boxed{\mathscr{A} \text{ est le sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \text{ engendré par } (A,B,C)}$.

La famille (A,B,C) est génératrice de $\mathscr{A}$; de plus, si $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $aA+bB+cC=0\Longrightarrow\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&-c&b\end{pmatrix}=0\Longrightarrow a=b=c=0$: la famille (A,B,C) est libre et forme une base de $\mathscr{A}$: $\boxed{\dim(\mathscr{A})=3}$.

25) On montre que $\mathscr{A}$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

- $\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- $I_3\in\mathscr{A}$ (avec $a=b=1$ et $c=0$).
- $\forall M,M'\in\mathscr{A}$, avec des notations évidentes :

$$M-M'=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&-c&b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a'&0&0\\0&b'&c'\\0&-c'&b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-a'&0&0\\0&b-b'&c-c'\\0&-c+c'&b-b'\end{pmatrix}\in\mathscr{A}.$$

$$\text{et } M\times M'=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&-c&b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a'&0&0\\0&b'&c'\\0&-c'&b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa'&0&0\\0&bb'-cc'&bc'+cb'\\0&-cb'-c'b&bb'-cc'\end{pmatrix}\in\mathscr{A}.$$

- $\forall M,M'\in\mathscr{A}$, $MM'=M'M$ (voir calcul ci-dessus).

Ainsi, $\boxed{\mathscr{A} \text{ est un anneau commutatif}}$ (sous-anneau de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$).

26) Comme $\mathrm{card}(I_3, M, M^2) = 3 = \dim(\mathscr{A})$, il suffit de montrer que (I_3, M, M^2) est libre dans $\mathscr{A}$; d'abord, cette famille est bien à valeurs dans $\mathscr{A}$ (I_3 et M sont dans $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}$ est stable pour le produit).

Un calcul simple montre que $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Si α, β et γ sont des réels et si $\alpha I_3 + \beta M + \gamma M^2 = 0$, alors $\begin{pmatrix} a-2b+4c & 0 & 0 \\ 0 & a+b & b+2c \\ 0 & -b-2c & a+b \end{pmatrix} = 0$:

$a - 2b + 4c = a + b = b + 2c = 0$; ainsi, $b = -2c$, $a = -b = 2c$ et $2c + 4c + 4c = 0$; donc $a = b = c = 0$ et la famille (I_3, M, M^2) est libre. Ainsi, $\boxed{(I_3, M, M^2) \text{ est une base de } \mathscr{A}}$.

27) Un calcul simple montre que $\boxed{M^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}}$, puis que $\boxed{M^3 = 2M - 4I_3}$.

28) Comme $M \in \mathscr{A}$ et que $\mathscr{A}$ est stable pour le produit, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\, M^k \in \mathscr{A}}$ donc est de la forme désirée.

29) On a $M^{k+1} = M^k \times M$; par identification des coefficients, on obtient :
$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\, a_{k+1} = -2a_k,\, b_{k+1} = b_k - c_k \text{ et } c_{k+1} = b_k + c_k}$.

30) (a_k) est une suite géométrique de raison -2 : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\, a_k = (-2)^k a_0 = (-2)^k}$.

31) On a vu que $b_{k+1} = b_k - c_k$ et $c_{k+1} = b_k + c_k$; donc, $z_{k+1} = z_k + iz_k$ soit $\boxed{z_{k+1} = (1+i)z_k}$.
On obtient donc (suite géométrique de raison $1+i$) : $z_k = (1+i)^k z_0 = (1+i)^k$.
Mais, $b_k = \mathrm{Re}(z_k)$ donc $\boxed{b_k = \mathrm{Re}\big((1+i)^k\big)}$.

32) $c_k = b_k - b_{k+1}$; en remplaçant dans la deuxième relation de récurrence :
$b_{k+1} - b_{k+2} = b_k + (b_k - b_{k+1})$ et donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\, b_{k+2} - 2b_{k+1} + 2b_k = 0}$.
On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ; l'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 2 = 0$ dont les racines sont $1+i$ et $1-i$;
on a donc b_k de la forme $\lambda(1+i)^k + \mu(1-i)^k$; mais $b_0 = 1 = \lambda + \mu$ et $b_1 = 1 = \lambda(1+i) + \mu(1-i)$; on obtient $\lambda = \mu = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\, b_k = \dfrac{(1+i)^k + (1-i)^k}{2} = \mathrm{Re}\big((1+i)^k\big)}$.

33) On a $\mathrm{tr}(M^0) = \mathrm{tr}(I_3) = 3 = u_0$; $\mathrm{tr}(M) = 0 = u_1$; $\mathrm{tr}(M^2) = 4 = u_2$.
Enfin, $M^3 = 2M - 4I_3$; donc, en multipliant par M^n, $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^{n+3} = 2M^{n+1} - 4M^n$.
En prenant la trace des deux membres (la fonction trace étant linéaire) :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}(M^{n+3}) = 2\,\mathrm{tr}(M^{n+1}) - 4\,\mathrm{tr}(M^n)$: les suites u et $(\mathrm{tr}(M^n))$ vérifient les mêmes relations de récurrence avec mêmes conditions initiales ; donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \mathrm{tr}(M^n)}$.

34) D'abord, $2 \mid u_2$ car $u_2 = 4$; on suppose maintenant $n \in \mathscr{P} \setminus \{2\}$.
D'après 33), $u_n = \mathrm{tr}(M^n) = a_n + 2b_n = (-2)^n + 2\,\mathrm{Re}((1+i)^n)$.

Mais, $(1+i)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (-1)^k + z$ avec z imaginaire pur ; donc, $\mathrm{Re}((1+i)^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (-1)^k$.

Maintenant, comme $n \in \mathscr{P} \setminus \{2\}$, n est impair et $(-2)^n = -2^n \equiv -2\ [n]$ et pour $k \in [\![1, [\frac{n}{2}]]\!]$, $n \mid \dbinom{n}{2k}$ ($2k \neq n$ car n impair) ;

ainsi, $u_n \equiv -2 + 2\ [n]$: $n \mid u_n$; ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathscr{P},\, n \mid u_n}$.

35) On a $\det(e_1, e_2, e_3) = -9 \neq 0$; donc $\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

36) On a $u(e_i) = \lambda_i e_i$, donc $c(u) = \lambda_1\,(e_1|e_1) + \lambda_2\,(e_2|e_2) + \lambda_3\,(e_3|e_3)$: $\boxed{c(u) = 6\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3}$.

Plus généralement, si $1 \leq i \leq 3$, $u^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$ et $c(u^k) = \lambda_1^k\,(e_1|e_1) + \lambda_2^k\,(e_2|e_2) + \lambda_3^k\,(e_3|e_3)$: $\boxed{c(u^k) = 6\lambda_1^k + 5\lambda_2^k + 6\lambda_3^k}$.

37) Si $p \mid c(u^p)$ pour tout p de $\mathscr{P}$, $p \mid (6\lambda_1^p + 5\lambda_2^p + 6\lambda_3^p)$;
mais, d'après la question 22), $p \mid \big(6(\lambda_1^p - \lambda_1) + 5(\lambda_2^p - \lambda_2) + 6(\lambda_3^p - \lambda_3)\big)$; donc $p \mid (6\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3)$ pour tout p de $\mathscr{P}$.
Alors, $6\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0$ et comme λ_1, λ_2 et λ_3 sont des entiers naturels, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$: la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est nulle et $\boxed{u \text{ est nul}}$.