

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1999

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE

FILIÈRE MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'emploi de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition du concours E.N.T.P.E. .

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES II - MP.*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit \mathcal{E} l'espace vectoriel complexe des fonctions complexes définies et continues sur le segment $I = [0, \pi]$. Soit $\| \cdot \|$ l'application qui, à toute fonction f de \mathcal{E} , associe le maximum du module de la fonction f sur l'intervalle I :

$$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq \pi} |f(x)|.$$

Il est connu que l'espace $(\mathcal{E}, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé.

Soit \mathcal{F} le sous-ensemble des fonctions f , continûment dérivables, qui appartiennent à l'espace vectoriel \mathcal{E} , qui prennent la valeur 0 aux points 0 et π et dont l'intégrale du carré du module de la fonction dérivée f' est majorée par 1.

$$\mathcal{F} = \left\{ f \mid f \in \mathcal{E}, f \in C^1(I), \int_0^\pi |f'(x)|^2 dx \leq 1, f(0) = f(\pi) = 0 \right\}.$$

Soit \mathcal{G} l'ensemble des fonctions complexes f définies sur le segment $I = [0, \pi]$ possédant la propriété : il existe une suite complexe $(b_n)_{n \geq 1}$, telle que

- la série de terme général $c_n = n^2 |b_n|^2$, $n \geq 1$, est convergente et sa somme est majorée par $2/\pi$,
- pour tout x réel de l'intervalle I , la série trigonométrique de terme général $b_n \sin(nx)$, $n \geq 1$, est convergente et sa somme est égale à $f(x)$.

$\mathcal{G} = \left\{ f \mid f \text{ est définie sur } I, \text{ il existe une suite de nombres complexes } b_n, n \geq 1 \text{ telle que :} \right.$

$$\left. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|^2 \leq \frac{2}{\pi}, \text{ pour tout réel } x \text{ de } I, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \right\}.$$

Le but du problème est d'étudier d'une part les relations existant entre les ensembles \mathcal{F} et \mathcal{G} , d'autre part leurs propriétés.

Première partie

Résultats préliminaires.

I-1°) Convergence de la série trigonométrique $b_n \sin(nx)$, $n \geq 1$:

Soit une suite complexe $(b_n)_{n \geq 1}$ telle que la série de terme général $n^2 |b_n|^2$, $n \geq 1$, soit convergente. Démontrer que la série de terme général b_n , $n \geq 1$, est absolument convergente en utilisant par exemple l'inégalité :

$$\text{pour deux réels positifs } a \text{ et } b, 2ab \leq (a^2 + b^2).$$

En déduire que l'ensemble \mathcal{G} est un sous-ensemble de l'espace vectoriel \mathcal{E} ; $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$.

I-2°) Un exemple de fonction appartenant à l'ensemble \mathcal{G} :

- a. En admettant le résultat classique : la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$, est égale à $\frac{\pi^2}{6}$, calculer la somme S de la série de terme général

$$\frac{1}{(2k+1)^2}, k \geq 0 : \quad S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} .$$

- b. Soit h la fonction définie sur l'intervalle I par la relation : $h(x) = \min(x, \pi - x)$. Soit h la fonction définie sur la droite réelle, impaire, périodique de période 2π , de restriction à l'intervalle I égale à la fonction h :

$$\text{pour tout réel } x, h(-x) = -h(x), h(x+2\pi) = h(x),$$

$$\text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } I, h(x) = h(x).$$

i/ Montrer que la fonction h est continue ; déterminer sa série de Fourier ;

ii/ Quelle est la somme de la série de Fourier de la fonction h ? Retrouver la valeur de S calculée ci-dessus.

iii/ En déduire que la fonction $k : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} h(x)$ appartient à l'ensemble \mathcal{G} .

I-3°) Égalité entre une fonction périodique et la somme de sa série de Fourier :

Étant données deux fonctions complexes f et g , définies et continues sur la droite réelle, 2π -périodiques, il est admis que, si les coefficients de Fourier des fonctions f et g sont égaux, les deux fonctions f et g sont égales : l'égalité, pour tout entier relatif n , de $c_n(f)$ et de $c_n(g)$ implique l'égalité de f et de g .

Démontrer que, si f est une fonction complexe, définie et continue sur la droite réelle, 2π -périodique, dont la série de Fourier converge uniformément, la fonction f est alors égale à la somme de sa série de Fourier.

Deuxième partie

L'ensemble \mathcal{F} est inclus dans l'ensemble \mathcal{G} .

II-1°) Une fonction f de \mathcal{F} est la somme d'une série trigonométrique :

Soit f une fonction donnée de l'ensemble \mathcal{F} .

- a. Soit f la fonction, définie sur la droite réelle, impaire, périodique de période 2π , de restriction à l'intervalle I égale à la fonction f . Établir que cette fonction f est continûment dérivable sur la droite réelle.
- b. En déduire l'existence d'une suite complexe $(b_n)_{n \geq 1}$ telle que, pour tout réel x de l'intervalle I , le réel $f(x)$ soit égal à la somme de la série trigonométrique de terme général $b_n \sin(nx)$, $n \geq 1$. Préciser la convergence de cette série.

II.2°) Inclusion de \mathcal{F} dans \mathcal{G} :

Soit f une fonction appartenant à l'ensemble \mathcal{F} ; démontrer que cette fonction f appartient aussi à l'ensemble \mathcal{G} . Est-ce que l'inclusion de \mathcal{F} dans \mathcal{G} est stricte ?

Troisième partie

Densité du sous-ensemble \mathcal{F} de \mathcal{G} dans \mathcal{G} pour la distance déduite de la norme de \mathcal{E} .

Le sous-ensemble \mathcal{G} de \mathcal{E} est compact.

III-1°) Densité de \mathcal{F} dans \mathcal{G} :

Soit g une fonction appartenant à \mathcal{G} ; la fonction g est la somme d'une série trigonométrique de terme général $b_n \sin(nx)$, $n \geq 1$; soit g_p la somme des p premiers termes de cette série (p est un entier strictement positif) : $g_p(x) = \sum_{n=1}^p b_n \sin(nx)$.

Démontrer que pour tout entier p , $p \geq 1$, la fonction g_p appartient au sous-ensemble \mathcal{F} . Établir que la fonction g est la limite dans l'espace vectoriel normé \mathcal{E} de la suite des fonctions g_p , $p \geq 1$. En déduire que le sous-ensemble \mathcal{F} de \mathcal{G} est dense dans \mathcal{G} .

III-2°) Limite d'une suite convergente de fonctions appartenant à \mathcal{G} :

Soit $(f_r)_{r \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant au sous-ensemble \mathcal{G} qui converge dans \mathcal{E} vers une fonction f . Par définition de \mathcal{G} , pour chaque fonction f_r , il existe une suite de nombres complexes $b_{r, n}$, $n \geq 1$, tels que

- la série de terme général $n^2 |b_{r, n}|^2$, $n \geq 1$, est convergente ; sa somme est majorée par $\frac{2}{\pi}$;

- pour tout entier $n, n \geq 1$, et tout réel x de I , $f_r(x)$ est la somme de la série de terme

$$\text{général } b_{r, n} \sin(nx), n \geq 1 : f_r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{r, n} \sin(nx) .$$

- a. Démontrer que, pour tout entier n fixé, $n \geq 1$, la suite $(b_{r, n})_{r \in \mathbb{N}}$ est convergente et a une limite b_n , qui est le nombre complexe défini par la relation ci-dessous :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx .$$

- b. Établir que les nombres complexes $b_n, n \geq 1$, définis ci-dessus ont la propriété : la série de terme général $n^2 |b_n|^2, n \geq 1$, est convergente ; sa somme vérifie

$$\text{l'inégalité suivante : } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|^2 = \frac{2}{\pi} .$$

- c. En déduire que la fonction f appartient à l'ensemble \mathcal{G} .

III-3°) Adhérences des sous-ensembles \mathcal{F} et \mathcal{G} dans \mathcal{E} :

Déterminer l'adhérence du sous-ensemble \mathcal{G} dans \mathcal{E} ; en déduire que \mathcal{G} est fermé.

Quelle est l'adhérence dans \mathcal{E} du sous-ensemble \mathcal{F} ?

III-4°) Le sous-ensemble \mathcal{G} est compact :

- a. Soit f une fonction appartenant au sous-ensemble \mathcal{F} . Démontrer, pour tout couple de réels x et y de l'intervalle I , vérifiant l'inégalité $x < y$, la relation :

$$|f(y) - f(x)| \leq \sqrt{y - x} .$$

Utiliser, par exemple, l'expression de la différence $f(y) - f(x)$ au moyen d'une intégrale.

- b. Soit $(f_r)_{r \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant au sous-ensemble \mathcal{F} ; il est admis qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ qui converge simplement en tout point de l'intervalle I d'abscisse rationnelle : pour tout rationnel z ($0 < z < \pi$) $(f_{\varphi(r)}(z))_{r \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente.

Démontrer que la suite des fonctions $g_r = f_{\varphi(r)}, r \in \mathbb{N}$, converge uniformément sur l'intervalle I .

- c. En déduire que le sous-ensemble \mathcal{G} est compact.

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE