A 2007 MATH. I MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2007

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Séries et caractères

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers, $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs et N un entier supérieur ou égal à 2.

L'ensemble des classes d'équivalence pour la division euclidienne par N est noté $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. L'élément générique de cet anneau sera noté $\bar{a}$. On note P l'ensemble des éléments de $\{1, \cdots, N-1\}$ qui sont premiers avec N. L'ensemble des éléments inversibles pour la multiplication de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est noté $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. On rappelle que φ, l'indicatrice d'Euler, est telle que $\varphi(N)$ représente le cardinal de P. Si a divise b dans $\mathbb{Z}$, on notera $a \,|\, b$.

On rappelle aussi le lemme suivant : soit $(u_k, k \in \mathbb{N}^*)$ et $(\alpha_k, k \in \mathbb{N}^*)$ deux suites réelles. Si pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k,$$

alors

$$\sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k = -u_n T_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} T_k (u_k - u_{k-1}) + u_m T_m, \tag{1}$$

pour n, m entiers tels que $2 \leq n < m$. On rappelle que pour tout $x \in]-1, 1]$,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}. \tag{2}$$

On suppose fixée une application χ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

A. $\chi(0) = 0$ et χ non identiquement nul.

B. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, non premier avec N,

$$\chi(a) = 0.$$

C. Pour tous les entiers relatifs a et b,

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b).$$

D. χ est N-périodique :

$$\chi(a + N) = \chi(a), \text{ pour tout } a \in \mathbb{Z}.$$

I Cas particuliers

1. Calculer $\chi(1)$.

2. Lorsque $N = 2$, déterminer χ.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $N = 4$.

3. Montrer que $\chi(3)$ ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1.

4. On suppose maintenant que $\chi(3) = -1$. Montrer la convergence et calculer la valeur de la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} .$$

II Convergence de la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}$

Dans cette partie, a est un entier supérieur ou égal à 1 et premier avec N. Pour $k \in \{1, \cdots, N-1\}$, on désigne par r_k le reste de la division de ak par N.

5. En considérant le produit $\prod_{k \in P} ak$, montrer que $a^{\varphi(N)} - 1$ est divisible par N.

6. Montrer que $|\chi(a)| = 1$.

7. Montrer que les r_k sont deux à deux distincts.

8. Établir l'identité:
$$\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k).$$

On suppose dorénavant qu'il existe a premier avec N tel que $\chi(a) \neq 1$.

9. Pour chaque entier n, calculer $\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k)$.
On pourra commencer par le cas $n = 0$.

10. Montrer, pour tout $m > 0$, l'inégalité

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \chi(k) \right| \leq \varphi(N).$$

11. Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\chi(k)}{k}, n \geq 1 \right)$ est convergente.

III Comportement asymptotique

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$f_n = \sum_{d \mid n} \chi(d).$$

12. Soit n et m deux entiers strictement positifs, premiers entre eux. Montrer que $f_{nm} = f_n f_m$.

13. Soit p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Calculer f_{p^α}.

14. Pour tout entier $n \geq 1$, établir l'encadrement :

$$0 \leq f_n \leq n.$$

15. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que $f_{n^2} \geq 1$.

16. Déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n.$$

On note $f(x)$ la somme de cette série.

17. Montrer pour tout $x \in [1/2, 1[$:

$$f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_{\sqrt{\ln(2)}}^{+\infty} e^{-u^2} \, \mathrm{d}u.$$

On pourra utiliser une comparaison d'une série à une intégrale.

FIN DU PROBLÈME