ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1997

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
FILIÈRE PC
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - PC.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PC, comporte 4 pages.

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions réelles continues, définies sur l'intervalle $I = [0,1]$. Il est admis que l'application $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$ est une norme sur E. Pour deux fonctions f et g de E, soit $(f|g)$ l'expression :

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Il est admis que l'application $(f,g) \mapsto (f|g)$ est un produit scalaire sur E.
Soit K la fonction définie sur le carré $I \times I$ par la relation :

$$K(x,t) = \begin{cases} (1-t)x \text{ si } x \leqslant t \\ t(1-x) \text{ si } x \geqslant t \end{cases}$$

Il est admis que la fonction K est continue sur le carré $C = I \times I$.

1°) Étude de la fonction K :

a. Comparer pour un point (x,t) du carré C les valeurs prises $K(x,t)$ et $K(t,x)$ par la fonction K. Tracer pour un réel t donné de l'intervalle $]0,1[$ le graphe de la fonction $K_t : x \mapsto K(x,t)$.

b. Calculer les deux intégrales ci-dessous :

$$I_1 = \iint_C K(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\ I_2 = \iint_C K(x,t)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Étant donnée une fonction f définie et continue sur l'intervalle $I = [0,1]$, nulle en 0 et en 1, il est admis qu'il existe une unique fonction $\tilde{f}$, définie sur $\mathbb{R}$, impaire, périodique de période égale à 2, dont la restriction à I est la fonction f.

c. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction $\tilde{K}_t$. En déduire que la fonction K_t est la somme d'une série trigonométrique uniformément convergente.

Étant donnée une fonction f de l'espace E, soit $U(f)$ la fonction définie par la relation :

$$U(f)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Il est admis que l'application $f \mapsto U(f)$ est une application linéaire de E dans lui-même.

2°) L'application linéaire U :

a. Démontrer que, pour toute fonction f de l'espace vectoriel E, la fonction $U(f)$ est deux-fois continûment dérivable. Comparer la dérivée seconde de la fonction $U(f)$ à la fonction f. Déterminer la plus petite constante k telle que la dérivée première $U(f)'$ de la fonction $U(f)$ vérifie, pour toute fonction f, l'inégalité :

$$\|U(f)'\|_\infty \leqslant k\,\|f\|_\infty.$$

b. Démontrer que la fonction $U(f)$ est égale à la somme d'une série trigonométrique uniformément convergente ; la préciser en posant : $b_n(f) = 2\int_0^1 f(t)\sin(n\pi t)\ \mathrm{d}t$.

c. Démontrer que l'ensemble des réels $\|U(f)\|_\infty$ lorsque f est une fonction de E de norme égale à 1 ($\|f\|_\infty = 1$) est borné. Démontrer que l'application linéaire $U : f \mapsto U(f)$ est une application lipschitzienne de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_\infty)$ dans lui-même. Déterminer le réel $\|U\|$ défini par la relation :

$$\|U\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|U(f)\|_\infty.$$

d. Démontrer, pour toute fonction f de E et pour tout couple de réels x et y appartenant à l'intervalle I, la relation ci-dessous :

$$|U(f)(x) - U(f)(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x-y|\ \ \|f\|_\infty.$$

e. Déterminer le noyau et l'espace image de l'application U. En déduire que l'application U, considérée comme une application linéaire de E sur $U(E)$, est inversible et déterminer son inverse U^{-1}.

3°) Valeurs propres et vecteurs propres :

a. Démontrer que l'application $(f,g) \mapsto (U(f)|g)$ est un produit scalaire. En déduire que, si l'application linéaire U a des valeurs propres, ces valeurs propres sont strictement positives.

b. Déterminer les valeurs propres λ_n, $n = 1, 2, \ldots$, de l'application linéaire U. Montrer que les valeurs propres peuvent être rangées en une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendant vers 0. Démontrer que l'espace propre E_n associé à la valeur propre λ_n est un espace vectoriel de dimension 1. Soit φ_n une fonction engendrant l'espace E_n telle que $(\varphi_n|\varphi_n) = 1$.

c. Démontrer que, pour toute fonction f de E, la série de terme général

$$u_n(x) = \lambda_n\,(\varphi_n|f)\ \ \varphi_n(x),\ n = 1, 2, \ldots,$$

où x est un réel de l'intervalle I, est uniformément convergente. Comparer $U(f)(x)$ et la somme $h(x)$ définie par la relation :

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\,(\varphi_n|f)\ \ \varphi_n(x).$$

4°) Puissances successives de l'application U :

a. Pour un entier k donné strictement positif, l'application composée k-fois de U avec elle-même est notée U^k. Démontrer que, pour toute fonction f de l'espace E, la fonction $U^k(f)$ est la somme d'une série de fonctions construites avec les fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b. Soit k un entier naturel ; soit p_k la fonction définie par la relation $p_k(x) = x^k$ ($p_0(x) = 1$). Déterminer l'image de la fonction p_k par U : $U(p_k)$.

c. Calculer l'image $U^2(p_0)$ par l'application U^2 de la fonction p_0. Démontrer que, plus généralement, l'image $U^k(p_0)$ de la fonction p_0 par l'application U^k est la restriction d'une fonction polynôme à l'intervalle I. Préciser son degré et le coefficient du terme de degré le plus élevé.

5°) Un problème d'Helmholtz :

Le but de cette question est de déterminer une fonction g deux-fois continûment dérivable qui vérifie les relations (**H**) ci-dessous :

$$(\mathbf{H}) \qquad \begin{cases} \forall x \in I, -g''(x) = \lambda g(x) + h(x) \\ g(0) = 0, g(1) = 0 \end{cases}$$

Le réel λ est une constante donnée ; la fonction réelle donnée h est continue sur l'intervalle I. Le but poursuivi est de déterminer la fonction g comme somme d'une série trigonométrique. Résoudre les équations **(H)** c'est résoudre un problème d'Helmholtz.

a. Démontrer que déterminer cette fonction g est équivalent à rechercher une fonction g appartenant à l'espace E vérifiant l'équation suivante

$$(\mathbf{I}) \qquad g = \lambda U(g) + k$$

où k est une fonction qui appartient à un sous-espace vectoriel de E qui sera précisé.

b. Dans cette question il est supposé qu'il existe une fonction g qui appartienne à E et vérifie l'équation **(I)** ; soit $(b_n(g))_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des réels définis par la relation :

$$b_n(g) = 2\int_0^1 g(t)\sin(n\pi t)\ \mathrm{d}t,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Est-ce que la série de terme général $b_n(g)\sin(n\pi x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est uniformément convergente dans I ?

Établir les relations vérifiées par ces réels $b_n(g)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer qu'il existe une suite de réels μ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, tels que, lorsque le réel λ est différent de tous les réels μ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, les coefficients $b_n(g)$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont définis de manière unique. Les calculer.

c. Est-ce que le procédé utilisé à la question précédente permet de construire une solution de l'équation **(I)** lorsque le réel λ est différent de tous les réels μ_n, $n \in \mathbb{N}^*$?

d. Discuter les équations obtenues à la question 5 $^\circ$.b, donnant les coefficients $b_n(g)$, $n = 1, 2, \ldots$, lorsque le réel λ est égal à l'un des réels μ_n. En déduire éventuellement une solution de l'équation **(I)**.