ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1998

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE
FILIÈRE PC
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition du concours E.N.T.P.E. ; suite à l'arrêté du 9 décembre 1997.
Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I - PC.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PC, comporte 4 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Étant donné un réel μ (μ R), soit (E_μ) l'équation différentielle ci-dessous :

(E_μ) $$16(x^2 - x)\, y\delta + (16\, x - 8)\, y' - \mu\, y = 0\,.$$

Étant donné un intervalle I de la droite réelle, il est admis que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (**E_μ**) sur cet intervalle I, est un espace vectoriel $E_\mu(I)$.

Première partie

I-1°) Intervalles de définition des solutions :

Déterminer trois intervalles I , les plus grands possible, deux à deux disjoints, pour lesquels la dimension de l'espace vectoriel $E_\mu(I)$ est égale à 2.

I-2°) Solutions de (E_μ) développables en série entière dans un intervalle de centre 0 :

Soit y une fonction inconnue, égale à la somme d'une série entière de terme général $a_n x^n$, n N, de rayon de convergence R, supposé strictement positif :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,.$$

a. Déterminer la relation nécessaire et suffisante entre les coefficients a_n et a_{n+1}, $(n \geq 0)$, pour que la fonction y soit solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E}_\mu)$. En déduire une expression du coefficient a_n en fonction des réels a_0, n et μ (introduire $(2n)!$).

b. Le réel a_0 étant supposé différent de 0, déterminer suivant les valeurs du réel μ, le rayon de convergence R . Expliciter le coefficient a_n lorsque R est infini.

Dans les questions I-3° et I-4° les réels a_0 et μ sont égaux à 1 : $a_0 = 1$, $\mu = 1$. Soit φ la fonction définie au moins dans l'intervalle $]-R, R[$ par la relation:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

I-3°) <u>Étude de la fonction φ</u> :

a. Exprimer, pour tout entier n, le coefficient a_n à l'aide du coefficient du binôme C_{4n}^{2n}. Déterminer, en utilisant la formule de Stirling, deux réels α et k (k différent de 0), tels qu'un équivalent de a_n, lorsque l'entier n croît vers l'infini, soit $\dfrac{k}{n^\alpha}$.

b. Démontrer que la fonction φ est définie et continue sur l'intervalle fermé $[-R, R]$.

c. Démontrer que la fonction φ est de classe C^1 sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$, puis que sa dérivée φ' admet une limite à droite en $-R$; en déduire que φ est de classe C^1 sur $[-R, R[$.

I-4°) <u>Étude de la dérivée φ' lorsque le réel x tend vers 1</u> :

a. Un résultat préparatoire : soit une suite réelle positive $(b_n)_{n\ N}$ telle que la série entière de terme général $b_n x^n$, $n\ N$, ait un rayon de convergence égal à 1. Soit g(x) la somme de cette série : $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Démontrer que, si la fonction g est majorée sur l'intervalle $[0, 1[$, la série de terme général b_n, $n\ N$, est convergente.

b. Préciser la nature de la série de terme général $n\, a_n$, $n\ N$. En déduire le comportement de $\varphi'(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Deuxième partie

Dans cette partie le réel μ est égal à 1 ; le but est de résoudre l'équation différentielle (E_1) dans l'intervalle $I =]0, 1[$. Il pourra être utile de poser :

$$E_1(y)(x) = 16(x^2 - x)\, y\delta(x) + (16\, x - 8)\, y'(x) - y(x)$$

Soit θ la fonction : $t\text{-}x = \frac{1}{2}(1 + \cos t)$, définie sur l'intervalle $]0, \pi[$.

II-1°) Déterminer une équation différentielle (**F**) telle que la fonction y est solution de (**E$_1$**) sur I, si et seulement si la fonction $z = y\circ\theta : t\text{-}y\big(\theta(t)\big)$ est solution de (**F**) sur $]0, \pi[$.

II-2°)En supposant connu le résultat ci-dessous, valable pour t compris entre 0 et π, 0< t < π :

$$\cos(\frac{t}{4}) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}} \quad , \quad \sin(\frac{t}{4}) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}} \quad ,$$

déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle (**E$_1$**) dans l'intervalle I.

II-3°) En déduire une expression de la restriction à l'intervalle I de la fonction φ étudiée dans les question I-3° et I-4°, à l'aide de fonctions élémentaires.

Troisième partie

Soit C l'espace vectoriel des fonctions réelles, définies sur l'intervalle fermé $\bar{I} = [0, 1]$, de classe $C^{\bullet}$. Soit D l'endomorphisme de C qui fait correspondre à une fonction f son image D(f) définie par la relation suivante

$$D(f) : x\text{-}16(x^2 - x)\, f\delta\,(x) + (16\,x - 8)\, f'(x)\ .$$

III-1°) <u>L'espace préhilbertien réel</u> $\big(C, (\ |\ )\big)$:

Étant données deux fonctions f et g appartenant à l'espace C, démontrer que la fonction $x\text{-}\frac{f(x)\,g(x)}{\sqrt{x(1-x)}}$ est intégrable sur l'intervalle I.

Par convention : pour deux fonctions f et g de l'espace C, le symbole (f | g) désigne la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(x)\,g(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$.

Il est admis dans la suite que l'application $(f, g)\text{-}(f \mid g)$ de $C\infty C$ dans R est un produit scalaire. Ainsi $\big(C, (\ |\ )\big)$ est un espace préhilbertien réel.

III-2°) <u>Une propriété de l'endomorphisme D</u> :

Démontrer que, pour tout couple de fonctions f et g de l'espace C, il vient :

$$(f \mid D(g)) = (D(f) \mid g)\ .$$

Indication : cette égalité peut, par exemple, être démontrée en admettant la relation :

$$D(f)(x) = -16\,\sqrt{x - x^2}\;\frac{d}{dx}\Big\{\sqrt{x - x^2}\;\frac{df(x)}{dx}\Big\}\ .$$

III-3°) Valeurs propres et sous-espaces propres :

Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme D. Démontrer que cette valeur propre est un réel positif ou nul ($\lambda \geq 0$).

Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes, démontrer que les sous-espaces propres G_λ et G_μ associés sont orthogonaux dans l'espace préhilbertien réel C.

III-4°) Noyau et espace image de l'endomorphisme D :

Déterminer le noyau de l'endomorphisme D. Démontrer que toute fonction h de l'espace image D(C) est orthogonale à la fonction constante égale à 1 : $(1 \mid h) = 0$.

III-5°) Dimension du sous-espace propre G_μ associé à une valeur propre μ :

Soit μ une valeur propre de l'endomorphisme D, G_μ le sous-espace propre associé.

a. Démontrer que la dimension du sous-espace propre G_μ est inférieure ou égale à 2.

b. Étant données deux fonctions y_1 et y_2 appartenant à G_μ, soit W le Wronskien de ces fonctions $\left(W(x) = y_1(x)\ y_2'(x) - y_1'(x)\ y_2(x)\right)$. Déterminer cette fonction W. En déduire la dimension du sous-espace propre G_μ.

III-6°) Eléments propres de l'application • :

Soit P le sous-espace vectoriel de C des restrictions des fonctions polynomiales à l'intervalle $\bar{I}$.

a. Démontrer que ce sous-espace vectoriel P est stable par D.

Soit • l'endomorphisme de P induit par D.

b. Déterminer la suite croissante $(\lambda_q)_{q \quad N}$ des valeurs propres de l'endomorphisme • ainsi que le sous-espace propre associé à chaque valeur propre λ_q. Pour chaque valeur propre λ_q, $q \quad N$, préciser le degré de la fonction polynomiale T_q , élément propre associé à cette valeur propre qui vérifie la condition $T_q(0) = 1$.

c. Démontrer que l'espace image de l'application • est l'espace vectoriel des éléments h de P qui vérifient la condition $(h \mid 1) = 0$.

III-7°) Valeurs propres de l'endomorphisme D :

a. Soit g une fonction de C supposée orthogonale au sous-espace vectoriel P. Démontrer en utilisant le théorème d'approximation d'une fonction définie et continue sur un compact par une fonction polynomiale que la fonction g est nulle.

b. En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme D .

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE